

THÈSES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES-PHYSIQUES

par

Michel AUBRUN

Ingénieur E.N.S.E.M. - Docteur Ingénieur

PREMIÈRE THÈSE : DÉTERMINATION DU CORRECTEUR RÉALISABLE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE A PARTIR D'UN CORRECTEUR THÉORIQUE.

DEUXIÈME THÈSE : PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ : DIFFÉRENTS APPAREILS CAPTEURS DE PRESSION SPÉCIALEMENT DE PETITE DIMENSION.

Soutenues le 10 Mars 1970, devant la Commission d'Examen

Membres du Jury

Président : M. R. GUILLIEN

Examineurs : MM. R. CHAUSSARD
A. FRUHLING
R. HUSSON

1970

THESES

Collection 2000

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITE DE NANCY

DOCTEUR EN SCIENCES

Michel MULLER

Université de Nancy - Faculté des Sciences

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE NANCY
DOCTEUR EN SCIENCES

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE NANCY
DOCTEUR EN SCIENCES

Thèse de Michel MULLER, Université de Nancy

Université de Nancy

Thèse de Michel MULLER

Thèse de Michel MULLER

Thèse de Michel MULLER

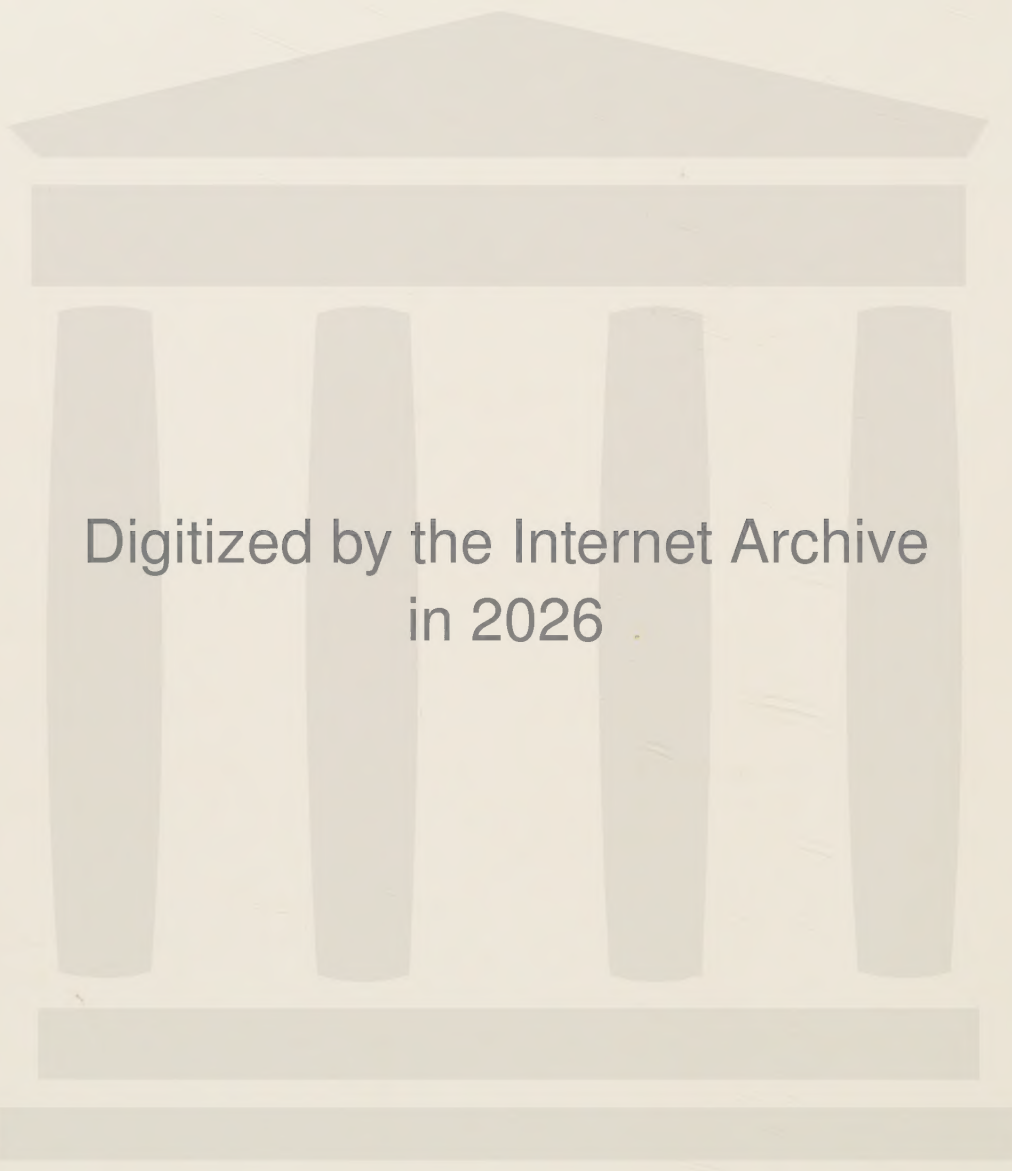
Thèse de Michel MULLER

UDART & CLÉMENT

RELIEURS

11, Rue Sainte-Anne, 11

Tél. 52.80.09 - NANCY



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551920_0003

THÈSES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES-PHYSIQUES

par

Michel AUBRUN

Ingénieur E.N.S.E.M. - Docteur Ingénieur

PREMIÈRE THÈSE : DÉTERMINATION DU CORRECTEUR RÉALISABLE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE A PARTIR D'UN CORRECTEUR THÉORIQUE.

DEUXIÈME THÈSE : PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ : DIFFÉRENTS APPAREILS CAPTEURS DE PRESSION SPÉCIALEMENT DE PETITE DIMENSION.

Soutenues le 10 Mars 1970, devant la Commission d'Examen

Membres du Jury

Président : M. R. GUILLIEN

Examineurs : MM. R. CHAUSSARD
A. FRUHLING
R. HUSSON

1970

THÈSES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

par

Michel ALBRIUN

Ingénieur E.N.S.E.M. - Docteur Ingénieur

PREMIÈRE PARTIE : DÉTERMINATION D'UN CORRECTEUR RÉALISABLE D'UN
SYSTÈME LINÉAIRE À PARTIR D'UN CORRECTEUR
THÉORIQUE.

DEUXIÈME PARTIE : PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ : DIFFÉRENTS
APPAREILS CAPTEURS DE PRESSION SPÉCIALEMENT DE
PETITE DIMENSION.

Soutenue le 10 Mars 1970, devant le Comité de Thèses

Membres du Jury

Président : M. R. GUILLET
Rapporteurs : MM. J. CHAUVARD
A. RIVLIN
X. FLEURY

1970

DETERMINATION
DU CORRECTEUR REALISABLE
D'UN SYSTEME LINEAIRE
A PARTIR
D'UN CORRECTEUR THEORIQUE

DOYEN : M. AUBRY
ASSESEUR : M. GAY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT, ROUBAULT.

Professeurs honoraires : MM. RAYBAUD, LAFFITTE, LERAY, JOLY, LAPORTE, EICHHORN, CAPELLE, GODEMENT, DUBREIL, L. SCHWARTZ, DIEUDONNE, LONGCHAMBON, LETORT, DODE, GAUTHIER, GOUDET, OLMER, CORNUBERT, CHAPELLE, GUERIN, WAHL.

Maîtres de Conférences honoraires : MM. LIENHART, PIERRET, Melle MATHIEU.

PROFESSEURS

MM. ROUBAULT	Géologie	GAYET	Physiologie
VEILLET	Biologie Animale	HADNI	Physique
BARRIOL	Chimie Théorique	*BASTICK	Chimie
BIZETTE	Physique	DUCHAUFOUR	Pédologie
GUILLIEN	Electronique	GARNIER	Agronomie
LEGRAS	Mécanique Rationnelle	NEEL	Chimie Organique Industrielle
BOLFA	Minéralogie	BERNARD	Géologie Appliquée
NICLAUSE	Chimie	*CHAMPIER	Physique
FAIVRE	Physique Appliquée	*GAY	Chimie Biologique
AUBRY	Chimie Minérale	STEPHAN	Zoologie
COPPENS	Radiogéologie	*CONDE	Zoologie
DUVAL	Chimie	*WERNER	Botanique
FRUHLING	Physique	EYMARD	Calcul Différentiel et Intégral
HILLY	Géologie	LEVISALLES	Chimie Organique
LE GOFF	Génie Chimique	FELDEN	Physique
SUHNER	Physique Expérim.	*GOSSE	Mécanique Physique
CHAPON	Chimie Biologique	*DAVOINE	Physique (ENSMIM)
HEROLD	Chimie Minérale Industrielle	HORN	Physique (1 ^{er} Cycle)
SCHWARTZ B.	Exploitation Minière	*ROCCI	Géologie
MALAPRADE	Chimie	DELPUECH	Chimie Physique
* MANGENOT	Botanique		
	N....		Chimie Biologique
	N....		Mécanique Appliquée
	N....		Analyse Supérieure
	N....		Méthodes Mathématiques de la Physique
	N....		Mécanique Rationnelle

(*) Professeur titulaire à titre personnel.

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme BASTICK	Chimie P. C. Epinal	BALESDENT	Thermodynamique,
MM. GUDEFIN	Physique		Chimie Appl. (ENSIC)
VUILLAUME	Psychophysiologie	BLAZY	Minéralogie Appliquée
FRENTZ	Biologie Animale		(ENSG)
MARI	Chimie (ISIN)	JANOT	Physique P. C. Epinal
AUROUZE	Géologie	CACHAN	Entomologie Appliquée
DEVIOT	Physique du Solide		(ENSA)
FLECHON	Physique P. C.	JACQUIN	Pédologie et Chimie
Melle HUET	Mathématiques CBG		Agricoles
VIGNES	Métallurgie	MAINARD	Physique M. P.
JURAIN	Géologie C. B. G.	MARTIN	Chimie P. C.
		PAULMIES	Mécanique Expérim.
		PROTAS	Minéralogie

MAITRES DE CONFERENCES

MM. JOZEFOWICZ	Physico-Chimie	GERL	Physique (ENSEM)
RIVAIL	Chimie Appl. (CUCES)	ROQUES	Chimie Minérale
VILLERMAUX	Génie Chimique	FERRIER	Mathématiques
METCHE	Biochimie appliquée	GILORMINI	Mécanique (ISIN)
	(Brasserie)	DEXHEIMER	Botanique
PAIR	Mathématiques Appl.	CASTRO	Chimie Organique
BAUMANN	Physique 1 ^{er} Cycle	N....	Mécanique des
DURAND	Physique		fluides (ISIN)
GRANGE	Physique (ISIN)	N....	Mathématiques
DEPAIX	Probabilité et	N....	Mathématiques P. C.
	Statistiques	N...	Mathématiques CBG
BAVEREZ	Chimie (ENSIC)	N....	Physiologie Animale
CHAMBON	Exploitation Minière	N....	Mathématiques M. P.
	(ENSMIM)	N....	Chimie Organique
HUSSON	Physique (ENSEM)	N....	Chimie (ENSIC)
WEISSLINGER	Physique	N....	Mathématiques

CHARGES D'ENSEIGNEMENTS

MM. AMARIGLIO, COEURE, DAVRAINVILLE, GIRARDEAU, HILY, MAURIN, NOVERRAZ, OVAERT, RUYER, WEBER.

AVANT - PROPOS

Que Monsieur le Professeur A. FRUHLING, Directeur du L. E. A., qui m'a accueilli en 1961, trouve ici l'expression de mes profonds remerciements pour tous ses conseils et pour la bienveillante compréhension qu'il a toujours eue à mon égard.

Je remercie Monsieur CHAUSSARD, Chef du Département d'Automatique d'Electricité De France, pour l'honneur et le plaisir qu'il me fait en siégeant à mon jury.

Tous mes camarades maintiennent au Laboratoire une saine ambiance de confiance et d'amitié pour laquelle je les remercie, en ajoutant une mention de reconnaissance toute particulière à J. BREMONT et J. RAGOT pour l'aide qu'ils m'ont apportée lors de mes vérifications, à Madame A. FRÜHLING qui a tapé ce texte avec sa diligente et aimable efficacité et à B. BOHN pour le collationnement des résultats et la réalisation soigneuse des figures.

IV.2. Vérification analogique. 30

CHAPITRE V - CORRECTEUR PID PHYSIQUEMENT REALISABLE.	32
V.1. Coefficients du correcteur.	32
V.2. Etude des intégrales quadratiques.	38
V.3. Simulation analogique.	40.
V.4. Conclusion.	41
CHAPITRE VI - GENERALISATION DE LA METHODE	43
VI.1. Correcteur PID pour une installation d'ordre quelconque sans numérateur.	43
VI.2. Cas où l'installation a une forme de Strejc.	46
CONCLUSION.	49
BIBLIOGRAPHIE.	51

physiquement réalisable $C(s)$, nous avons étudié, par simulation analogique, les réponses indicielles dans chacun de ces deux cas. Nous avons, de plus, construit la réponse indicielle du système physiquement réalisable obtenu sans tenir compte des constantes de temps supplémentaires, c'est-à-dire dont les paramètres ont la même valeur que ceux du correcteur théorique.

Nous avons enfin calculé les intégrales quadratiques

$$J_1 = \int_0^{\infty} [\xi(t)]^2 dt \quad \text{et} \quad J_2 = \int_0^{\infty} [\bar{i}(t)]^2 dt \quad \text{dans les trois cas}$$

précédents.

Pour que la comparaison des divers résultats ait un sens, nous avons toujours utilisé la même installation : un système du troisième ordre de type I, de fonction de transfert réduite [4] [5] [6]

$$G(s) = \frac{a}{s(1 + \lambda s + s^2)}$$

dont on fait varier le paramètre λ de [7]

$$\sqrt{3} \leq \lambda \leq \sqrt{10}$$

ce qui représente l'ensemble des cas usuels.

Cette installation est associée aux trois correcteurs les plus couramment utilisés, le correcteur PI, le correcteur PD, et enfin le correcteur PID.

Nous montrerons que la méthode proposée s'applique à tout type de correcteur, associé à toute installation, puisque nous envisageons dans le dernier chapitre le cas du système linéaire d'ordre quelconque. [8]

Le premier chapitre est consacré au rappel de la méthode des polynômes normaux ou caractéristiques.

METHODE DES POLYNOMES NORMAUX

.....

I.1. DEFINITIONS.

Considérons un système de fonction de transfert

$$F(s) = \frac{a'_o}{a_o + a_1s + a_2s^2 + + a_ns^n}$$

Les pulsations caractéristiques $\omega_i = \frac{a_i}{a_{i+1}}$ définissent les

coudes de la caractéristique fréquentielle pseudo-asymptotique de la

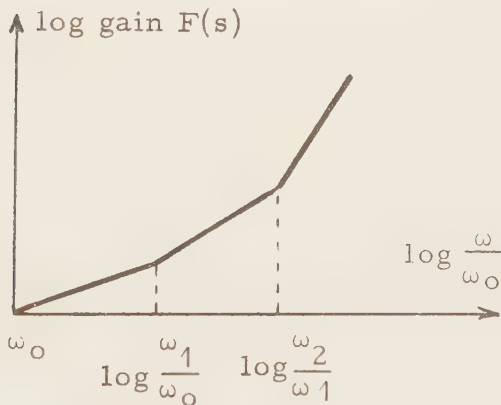


Figure 2.

figure 2, où la pente change d'une unité. On note que pour définir les pulsations caractéristiques, il faut que figurent toutes les puissances de s .

Pour que la caractéristique précédente ait une signification, il faut que $\frac{\omega_1}{\omega_o}$, $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ soient

au moins de l'ordre d'une octave.

Les rapports

$$\frac{\omega_i}{\omega_{i-1}} = \frac{a_i^2}{a_{i-1} \cdot a_{i+1}} = r_i \tag{1}$$

sont les rapports caractéristiques.

Si on leur donne la valeur commune r , on définit le polynôme normal correspondant que constitue alors le dénominateur de $F(s)$.

I. 2. REGIME TRANSITOIRE.

L'expérience montre que pour une transmittance à polynôme normal la réponse indicielle est sensiblement indépendante de l'ordre n et ne dépend pratiquement que de r et de la première pulsation carac-

téristique $\omega_o = \frac{a_o}{a_1}$, par son dépassement

$$\log(\Delta \%) = 4,8 - 2r \quad (2)$$

et par son temps de réponse t_r

$$t_r = \frac{2,2}{\omega_o} \quad (3)$$

relations empiriques déterminées expérimentalement. [9]

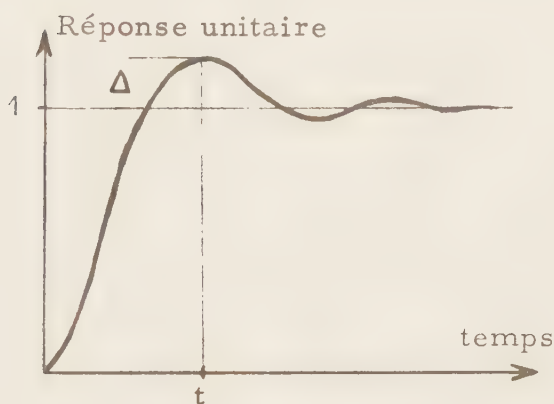


Figure 3.

I. 3. INFLUENCE DU NUMERATEUR.

Si le numérateur de la transmittance est

$$c(s) = a'_o + a'_1 s, \text{ on définit } \omega'_o = \frac{a'_o}{a'_1}.$$

Les formules (2) et (3) sont encore valables à condition d'y remplacer r par r_c , rapport caractéristique corrigé, et ω_o par ω_{oc} , définis selon

5.

$$r_c = 1,5 + \frac{4\omega_o}{\omega_o'} (r - 1,5) \quad (4)$$

$$\frac{1}{\omega_{oc}} = \frac{1}{\omega_o} - \frac{1}{2\omega_o'} \quad (5)$$

Si le numérateur de la transmittance est

$$c(s) = a_o' + a_1' s + a_2' s^2$$

avec les notations habituelles

$$\omega_o'^2 = \frac{a_o'}{a_2'} \quad \text{et} \quad 4\xi'^2 = \frac{a_1'^2}{a_o' a_2'}$$

r_c et ω_{oc} sont donnés par

$$r_c = 1,5 + 16 \xi'^3 \frac{\omega_o'^2}{\omega_o'^2} (r - 1,5) \quad (6)$$

$$\frac{1}{\omega_{oc}} = \frac{1}{\omega_o} - \frac{1}{\omega_o'} \quad (7)$$

Les relations (4) et (5) - ou (6) et (7) -, reportées dans les expressions (2) et (3) permettent de déduire la valeur du rapport caractéristique r à prendre pour que la réponse du système ait des performances données lorsque le correcteur utilisé est du type P, PI, PD, ou PID théorique.

Cette méthode donne de bons résultats, en ce qui concerne le taux de dépassement : si les écarts absolus maximaux sont d'environ 5 %, on a des plages importantes où la concordance est excellente.

En ce qui concerne le temps de réponse, la concordance est également très bonne ; nous verrons, par exemple dans le cas du

correcteur PD , que les courbes donnant les résultats analogiques et les résultats théoriques sont confondues sur presque toute leur longueur. $\boxed{10}$

Dans ce qui suit, nous comparerons donc la réponse du système corrigé ou non à la réponse du système théorique .

Le chapitre suivant est consacré à l'exposé de la méthode de calcul des coefficients du régulateur physiquement réalisable en prenant comme exemple le correcteur PD .

* . * . * . *

II.2. FONCTION DE TRANSFERT DES CORRECTEURS PI ET PD PHYSIQUEMENT REALISABLES.

Supposons qu'en réalité le correcteur introduise une constante de temps parasite proportionnelle à la constante de temps τ ou τ' et beaucoup plus petite qu'elle. [2]

Nous avons ainsi pour le correcteur PD ,

$$C(s) = \beta \frac{1 + \tau s}{1 + \varepsilon \tau s} \quad (4)$$

avec $\varepsilon \ll 1$

et pour le correcteur PI ,

$$C(s) = \beta x \frac{1 + \tau' s}{1 + x \tau' s} \quad (5)$$

avec $x \gg 1$.

Ces expressions ont pour valeur limite le $C_0(s)$ correspondant lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ ou lorsque $x \rightarrow \infty$ selon le cas. Nous avons étudié l'influence de ε et de $\frac{1}{x}$ sur les diverses caractéristiques de la réponse en leur donnant les valeurs numériques 0,1 et 0,05 qui correspondent à la plupart des systèmes réalisés, et occasionnellement une valeur nettement plus faible, par exemple 0,01 qui présente l'intérêt de montrer comment se fait le passage à la limite, plus particulièrement pour le calcul de l'intégrale quadratique J_2 dans le cas des correcteurs PD et PID , infinie alors pour $\varepsilon = 0$.

II.3. CORRECTEUR PID PHYSIQUEMENT REALISABLE.

Considérons le correcteur PID , comme l'association du correcteur $\frac{P}{2} I$ et du correcteur $\frac{P}{2} D$ tous deux physiquement réalisables, ce

qui permet d'écrire, en utilisant les relations (4) et (5),

$$C(s) = \frac{\beta}{2} x \cdot \frac{2 + \tau' s}{2 + x \tau' s} + \frac{\beta}{2} \cdot \frac{1 + 2 \tau s}{1 - 2 \varepsilon \tau s}$$

soit

$$C(s) = \frac{\beta}{2} \frac{x(2 + \tau' s)(1 - 2 \varepsilon \tau s) + (1 + 2 \tau s)(2 - x \tau' s)}{(2 + s \tau' s)(1 + 2 \varepsilon \tau s)}$$

en supposant que $\varepsilon = \frac{1}{x}$.

$$C(s) = \frac{\beta}{2} \frac{2(1+x) + 2s(x\tau' - 4\tau) + 2s^2\tau\tau'(1+x)}{2 + s(x\tau' + 4\varepsilon\tau) + 2\tau\tau' s^2}$$

Par ailleurs, pour simplifier cette expression, nous écrirons

$$x\tau' + 4\tau \neq \tau'(1+x)$$

en faisant sur le terme correctif 4τ une approximation justifiée numériquement par les résultats ultérieurs.

On peut alors poser

$$\beta(1+x) = \beta'x \quad \text{et} \quad x\tau' + 4\varepsilon\tau \neq x\tau'$$

pour obtenir finalement

$$\begin{aligned} C(s) &= \beta'x \frac{1 + s\tau' + s^2\tau\tau'}{2 + sx\tau' + 2s^2\tau\tau'} \\ &= \frac{\beta'x}{2} \frac{1 + s\tau' + s^2\tau\tau'}{1 + \frac{sx\tau'}{2} + s^2\tau\tau'} \end{aligned} \quad (6)$$

avec, bien entendu

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} C(s) &= C_o(s) \\ x &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

II. 4. DETERMINATION EXPERIMENTALE DU FACTEUR x .

Pratiquement, la caractéristique essentielle à déterminer est le rapport x . Nous avons construit analogiquement la réponse indicielle qui correspond à $C(s)$ donné par (6) dans le cas donné au chapitre V (tableau p.37) pour $\lambda^2 = 4$, $r = 2$ et $x = 10$ puis 20. Les coefficients de $C(s)$ sont donnés dans le tableau 1.

r	2	2
λ^2	4	4
x	10	20
$\frac{1}{\tau\tau'}$	0,208	0,222
$\frac{1}{\tau}$	0,98	0,98

Tableau 1.

En comparant (figure 4) la réponse du système théorique (trait plein) à celle du système réalisable (tirets) on déduit x par



$$a = \frac{\beta'x}{2} = \frac{\beta}{2} (1 + x)$$

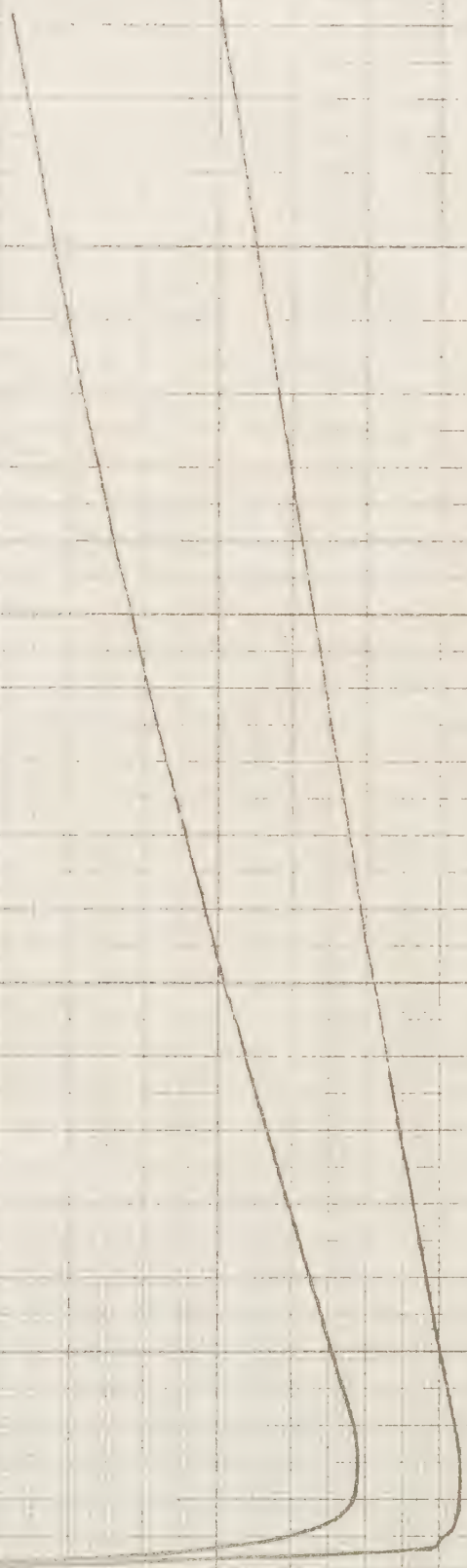
$$b = \beta$$

$$x = \frac{2a - b}{b}$$

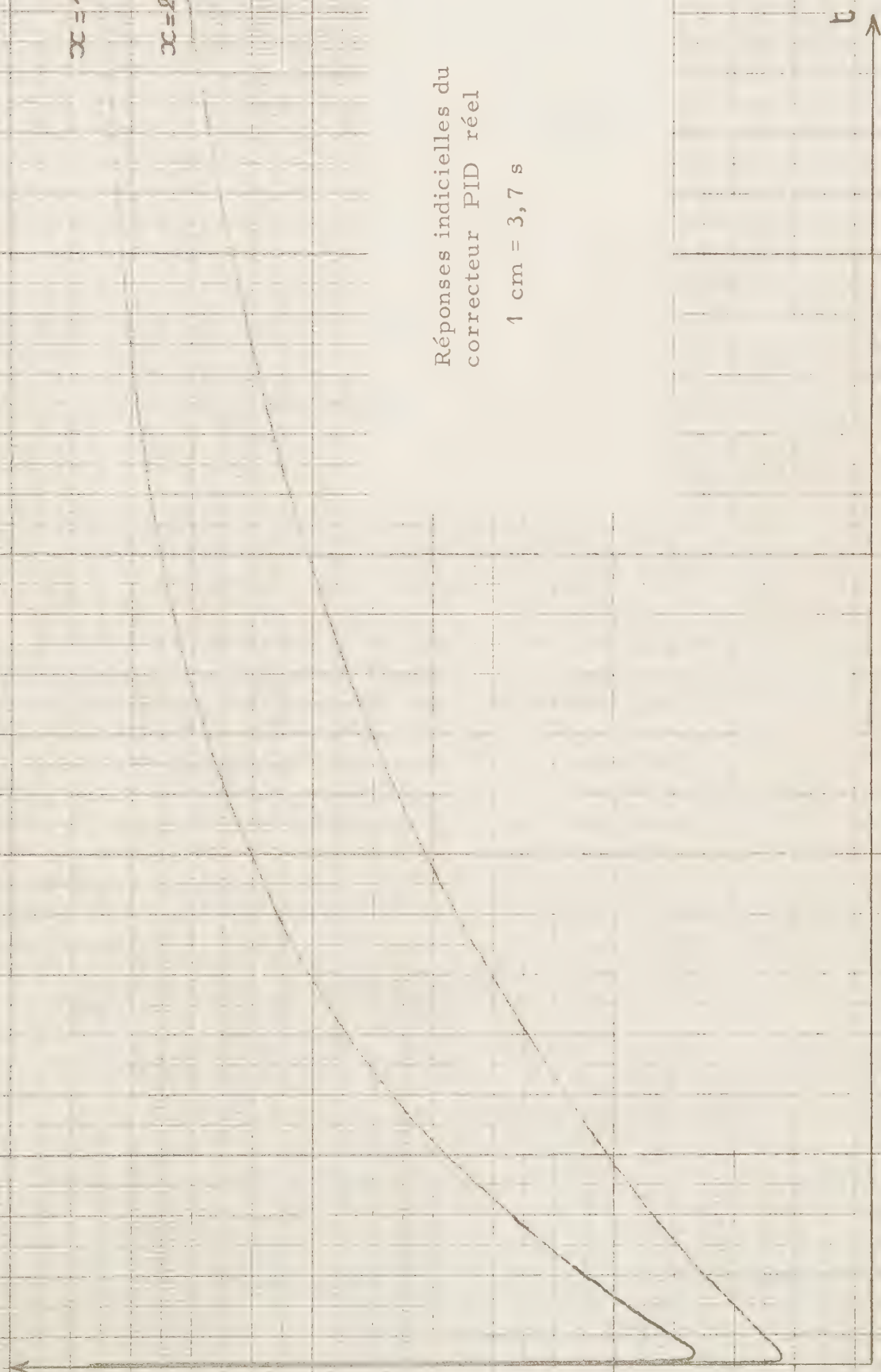
Figure 4.

Les réponses indicielles sont tracées dans les planches 1 et 2 qui ne diffèrent que par l'échelle des temps.

Réponses indicielles du
correcteur PID réel
1 cm = 0,75 s



2 A



Réponses indicielles du
correcteur PID réel
1 cm = 3,7 s

 *
 * CHAPITRE III *
 *

CORRECTEUR PD PHYSIQUEMENT REALISABLE

III.1. CALCUL DES COEFFICIENTS.

Avec $C(s) = \beta \frac{1 + \tau s}{1 + \varepsilon \tau s}$, la fonction de transfert en boucle fermée a pour expression

$$F(s) = \frac{C(s).G(s)}{1+C(s).G(s)} = \frac{a\beta(1+\tau s)}{a\beta + s(a\beta\tau + 1) + s^2(\lambda + \varepsilon\tau) + s^3(1 + \varepsilon\lambda\tau) + \varepsilon\tau s^4} \quad (1)$$

Comme seules les deux inconnues $a\beta$ et τ sont à déterminer, il suffit d'utiliser les deux premiers rapports caractéristiques, négligeant ainsi l'effet du troisième :

$$r_1 = \frac{(a\beta\tau + 1)^2}{a\beta(\lambda + \varepsilon\tau)} \quad (2)$$

$$r_2 = \frac{(\lambda + \varepsilon\tau)^2}{(a\beta\tau + 1)(1 + \varepsilon\lambda\tau)} \quad (3)$$

Pour le correcteur théorique, on a

$$r_{10} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_1 = \frac{(a\beta_0\tau_0 + 1)^2}{a\beta_0} \quad (4)$$

et

$$r_{20} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_2 = \frac{\lambda^2}{a\beta_0\tau_0 + 1} \quad (5)$$

ce qui donne immédiatement $a\beta_0$ et τ_0 , lorsque le polynôme est

normal, c'est-à-dire si $r_{10} = r_{20} = r$

$$\tau_o = \frac{r^2}{\lambda^3} (\lambda^2 - r) \quad (6)$$

$$a \beta_o = \frac{\lambda^3}{r^3} \quad (7)$$

Ce calcul n'étant pratiquement plus possible en toute rigueur à partir des relations (2) et (3), comme ε reste petit, nous négligerons les termes en ε^2

$$r_1 = \frac{(a \beta \tau + 1)^2}{a \beta \lambda (1 + \frac{\varepsilon \tau}{\lambda})} = \frac{(a \beta \tau + 1)^2}{a \beta \tau} \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{\tau}{\lambda}} \quad (8)$$

et

$$r_2 = \frac{\lambda^2 + 2 \varepsilon \lambda \tau}{(a \beta \tau + 1)(1 + \varepsilon \lambda \tau)} = \frac{\lambda^2}{(a \beta \tau + 1)} \frac{1 + \frac{2 \varepsilon \tau}{\lambda}}{1 + \varepsilon \lambda \tau} \quad (9)$$

Il apparaît ainsi comme premier terme une expression identique à r_{i0} , mais avec les paramètres du correcteur réel. Le terme multiplicatif est une fonction d'erreur k_i qui tend vers 1 lorsque le système réalisable tend vers le système théorique. Tandis que le premier facteur reste toujours calculable par (6) et (7), pour les termes correctifs k_i nous utiliserons les expressions (6) et (7) des paramètres théoriques en supposant qu'ils restent voisins de ceux que l'on adopte en réalité.

Le polynôme étant normal, on obtient dans ces conditions,

$$\frac{(a \beta \tau + 1)^2}{a \beta \lambda} k_1 = r \quad (10)$$

et

$$\frac{\lambda^2}{a \beta \tau + 1} k_2 = r \quad (11)$$

avec, ainsi, compte tenu de (6),

$$k_1 = \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{\tau_0}{\lambda}} = \frac{1}{1 + \varepsilon r^2 \frac{\lambda^2 - r}{\lambda^4}} \quad (12)$$

et

$$k_2 = \frac{1 + \frac{2 \tau_0}{\lambda}}{1 + \varepsilon \lambda \tau_0} = \frac{1 + \varepsilon 2r^2 \frac{\lambda^2 - r}{\lambda^4}}{1 + \varepsilon r^2 \frac{\lambda^2 - r}{\lambda^2}}$$

où s'impose la variable λ^2 .

Les valeurs numériques de k_1 et k_2 pour $3 \ll \lambda^2 \ll 10$ et pour $r = 1,8$, 2 et $2,2$ sont données dans le tableau 2. [12]

r	1,8			
λ^2	3	4	6	10
$\varepsilon = 0,1$	0,9586	0,9573	0,9636	0,9741
k_1				
$\varepsilon = 0,05$	0,9789	0,9782	0,9815	0,9867
$\varepsilon = 0,1$	0,9616	0,9262	0,8767	0,8320
k_2				
$\varepsilon = 0,05$	0,9786	0,9589	0,9320	0,9060

Tableau 2.
(1ère partie)

r	2			
λ^2	3	4	6	10
$\xi = 0,1$	0,9575	0,9523	0,9574	0,9690
k_1				
$\xi = 0,05$	0,9783	0,9796	0,9782	0,9843
$\xi = 0,1$	0,9606	0,9165	0,8596	0,8060
k_2				
$\xi = 0,05$	0,9789	0,9545	0,9216	0,8895

r	2,2			
λ^2	3	4	6	10
$\xi = 0,1$	0,9588	0,9484	0,9514	0,9636
k_1				
$\xi = 0,05$	0,9790	0,9735	0,9751	0,9815
$\xi = 0,1$	0,9618	0,9104	0,8435	0,7807
k_2				
$\xi = 0,05$	0,9797	0,9508	0,9113	0,8728

Tableau 2.
(fin)

Les valeurs de r comprises entre 1,8 et 2,2 sont celles que l'on adopte généralement.

De ces valeurs numériques, on déduit les paramètres corrigés du régulateur PD

$$a \beta = \frac{\lambda^3}{r^3} k_1 k_2^2 \quad (14)$$

$$T = \left(\frac{\lambda^2}{r} k_2 - 1 \right) \frac{r^3}{\lambda^3 k_1 k_2^2} \quad (15)$$

Ce qui nous a permis de construire les réseaux $a\beta(\lambda^2)$ et $\tau(\lambda^2)$ paramétrés en r et en ε . Sur le graphe 1, nous n'avons reporté, pour que la figure reste lisible, que les cas $r = 1, 8$ et $r = 2, 2$, et $\varepsilon = 0, 1$; les courbes pour $\varepsilon = 0, 05$ se situent au milieu des courbes $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = 0, 1$. Les résultats pour $r = 2$ sont donnés dans le tableau 3.

r	2			
λ^2	3	4	6	10
$a\beta_0$	0,649	1,000	1,836	3,952
τ_0	0,769	1,000	1,088	1,011
$a\beta_{01}$	0,573	0,800	1,299	2,487
τ_{01}	0,768	1,041	1,214	1,217
$a\beta_{005}$	0,608	0,888	1,525	3,077
τ_{005}	0,769	1,022	1,156	1,120

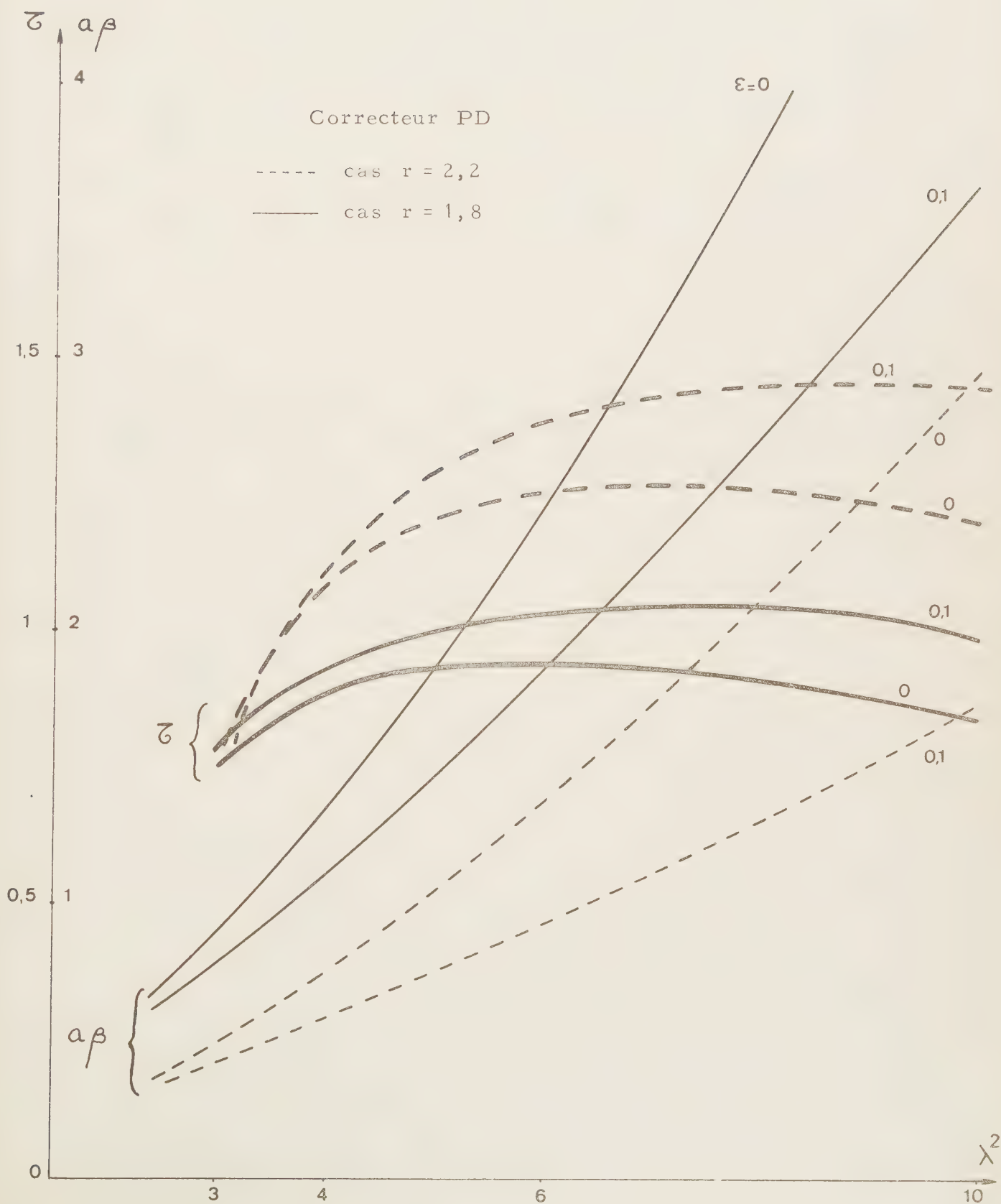
Tableau 3.

III. 2. ETUDE ANALOGIQUE DES PERFORMANCES.

III. 2. 1. Montage.

.....

Pour vérifier la validité de nos hypothèses, nous avons simulé analogiquement la fonction de transfert du système complet en boucle fermée pour $r = 2$ puis 2,2 et pour $\lambda^2 = 3, 4, 6$ et 10, avec chaque fois $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Pour chacun de ces huit cas, nous avons construit trois réponses :



- celle qui correspond à l'emploi du correcteur théorique,
- celle qui correspond à l'emploi du correcteur réel en utilisant pour celui-ci les coefficients du correcteur théorique : c'est le "fonctionnement réel non corrigé",
- celle qui correspond à l'emploi du correcteur physiquement réalisable en donnant aux paramètres les valeurs du graphe 1.

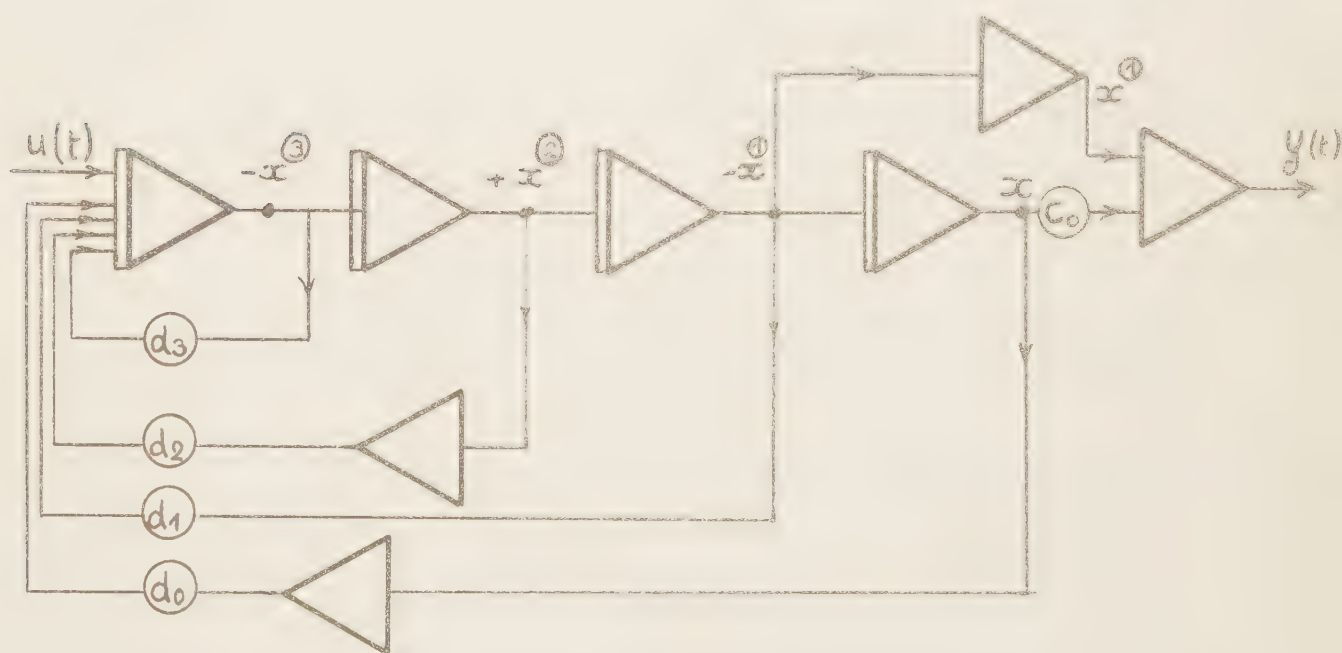


Figure 5.

Le montage pour les deux derniers cas est représenté sur la figure 5, puisque la fonction de transfert (1) est du quatrième ordre,

$$F(s) = \frac{a\beta(1 + \tau s)}{a\beta + s(a\beta\tau + 1) + s^2(\lambda + \varepsilon\tau) + s^3(1 + \varepsilon\lambda\tau) + \varepsilon\tau s^4}$$

que l'on modifie de manière à ce que les coefficients c_1 et d_4 du terme en s au numérateur et du terme en s^4 au dénominateur soient égaux à 1. De plus, opérant en temps réduit pour que tous les coefficients soient dans des plages convenables de réglage par $s = 2S$, nous avons dans ces conditions

$$F'(s) = \frac{2a\beta\tau}{16\varepsilon\tau} \cdot \frac{s + \frac{1}{2\tau}}{s^4 + s^3 \frac{1+\varepsilon\tau\lambda}{2\varepsilon\tau} + s^2 \frac{\lambda+\varepsilon\tau}{4\varepsilon\tau} + s \frac{a\beta\tau+1}{8\varepsilon\tau} + \frac{a\beta}{16\varepsilon\tau}}$$

de la forme

$$F'(s) = k \cdot \frac{s + c_0}{s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0}$$

que l'on décompose selon $\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{u}$ (figure 5).

Pour le premier cas, avec la fonction de transfert théorique

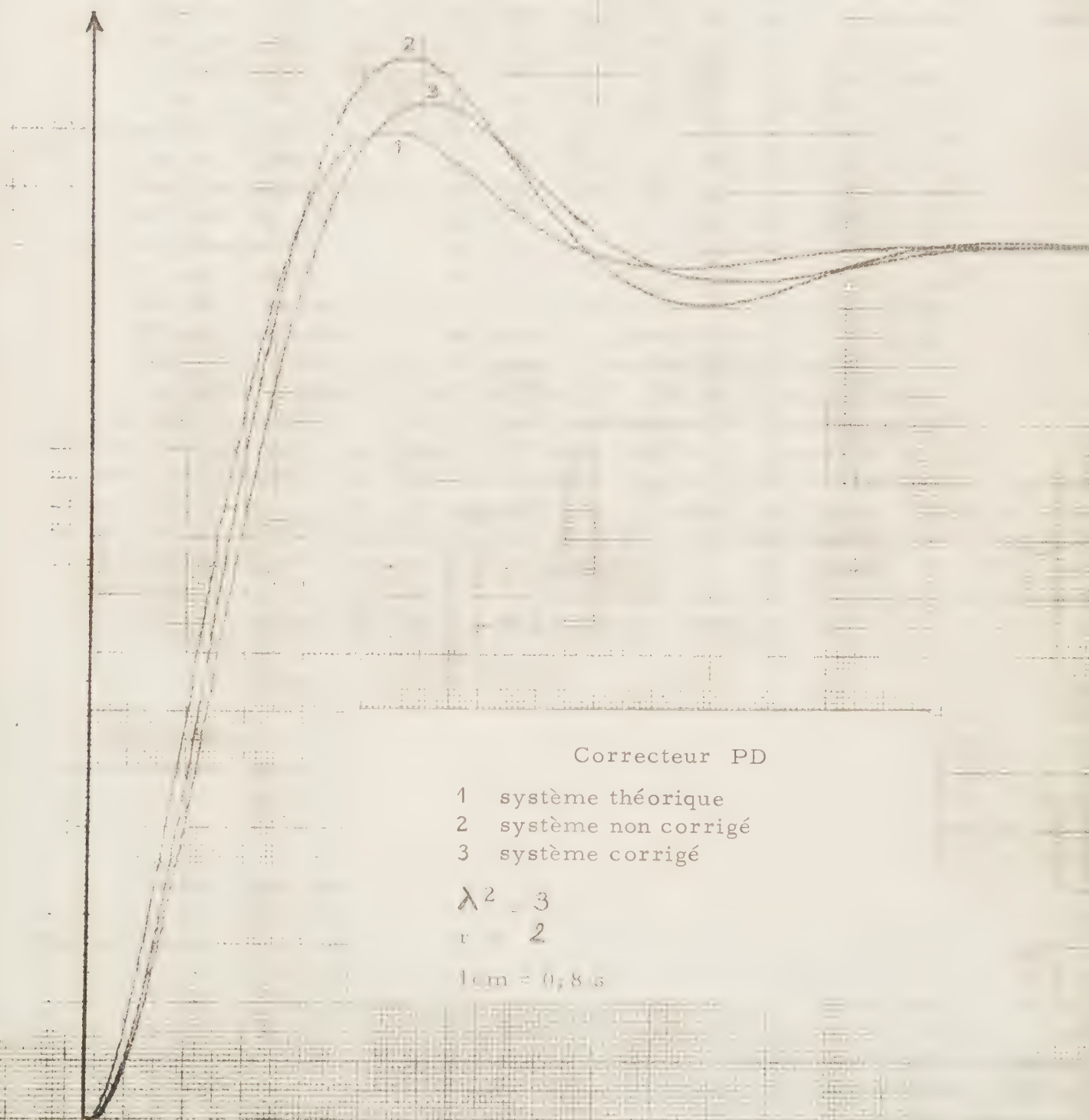
$$F_0(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(s) = \frac{a\beta(1 + \tau s)}{a\beta + s(a\beta\tau + 1) + s^2\lambda + s^3}$$

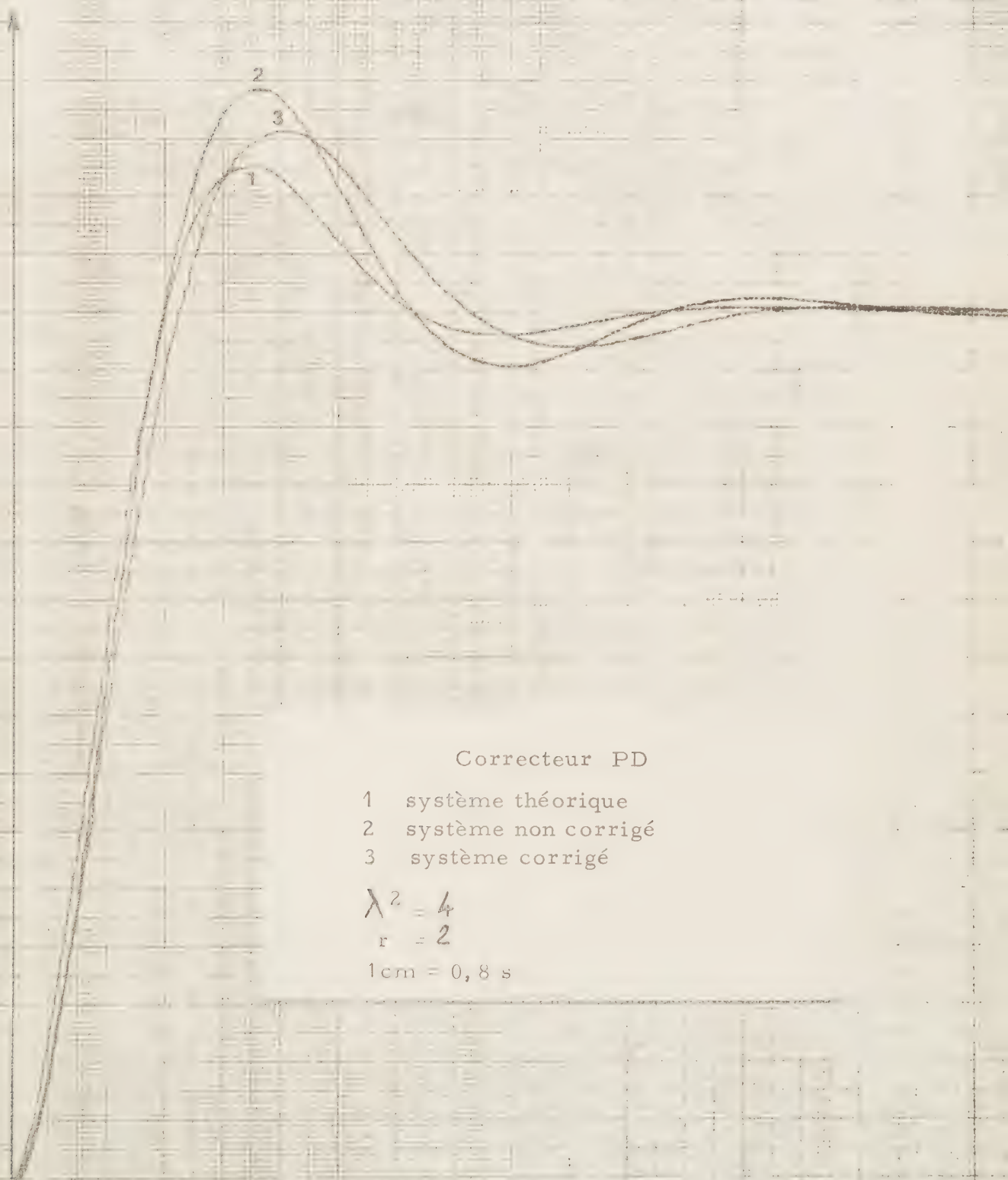
on construit la réponse à l'aide du même montage, avec un integrateur en moins.

Le tableau 4 donne pour les huit réseaux de courbes la valeur des coefficients de $F'(s)$.

r	2				2,2			
λ^2	3	4	6	10	3	4	6	10
c_{onc}	0,650	0,500	0,459	0,490	0,670	0,459	0,400	0,418
c_{oc}	0,650	0,480	0,411	0,410	0,690	0,450	0,359	0,342
d_{onc}	0,526	0,625	1,05	2,44	0,408	0,430	0,689	1,55
d_{oc}	0,466	0,480	0,668	1,27	0,375	0,331	0,418	0,745
d_{1nc}	2,43	2,50	3,44	6,18	2,28	2,08	2,72	4,76
d_{1c}	2,34	2,20	2,65	4,13	2,27	1,86	2,08	3,33

Tableau 4 (début)





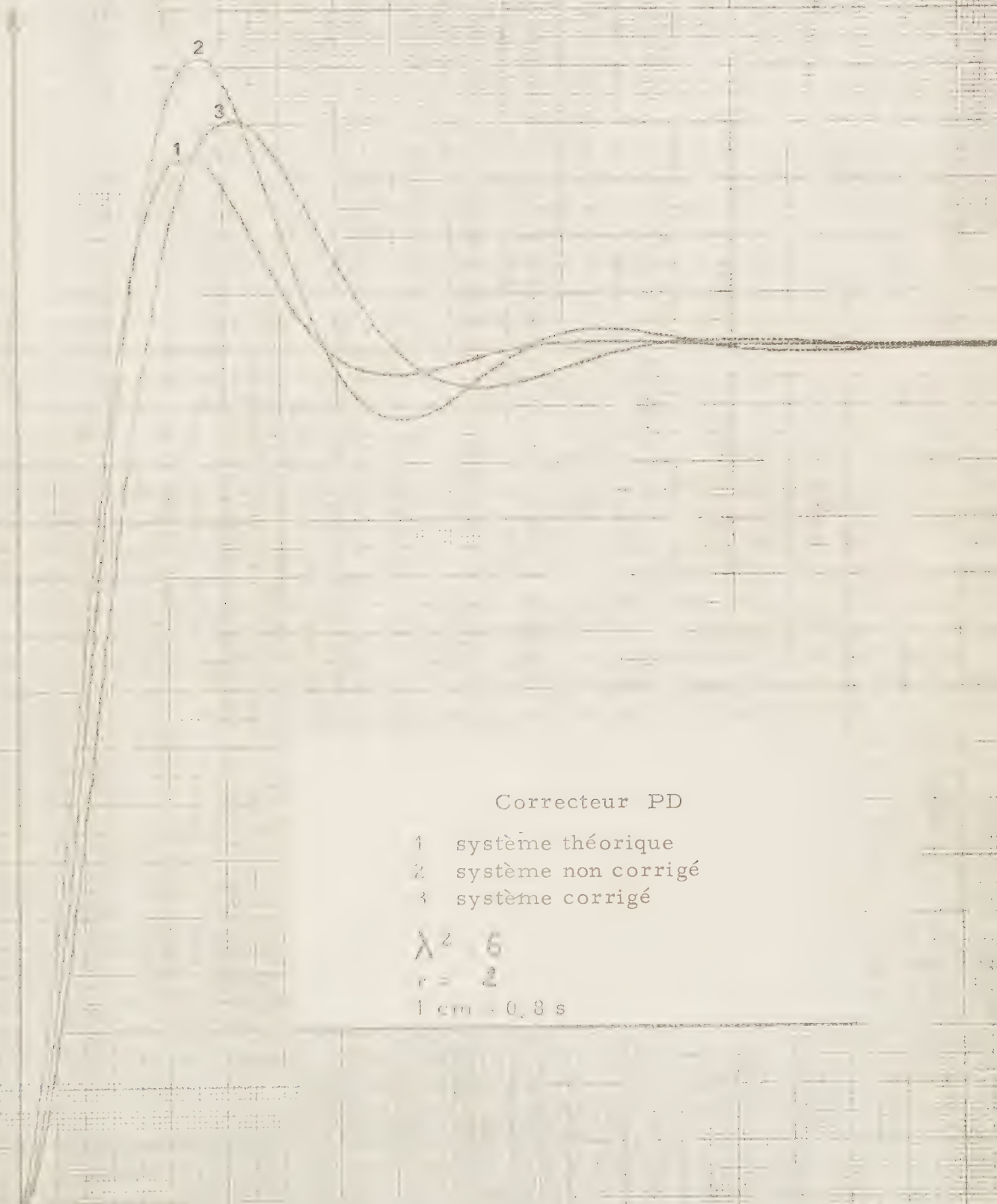
Correcteur PD

- 1 système théorique
- 2 système non corrigé
- 3 système corrigé

$$\lambda^2 = 4$$

$$r = 2$$

$$1\text{cm} = 0,8\text{ s}$$



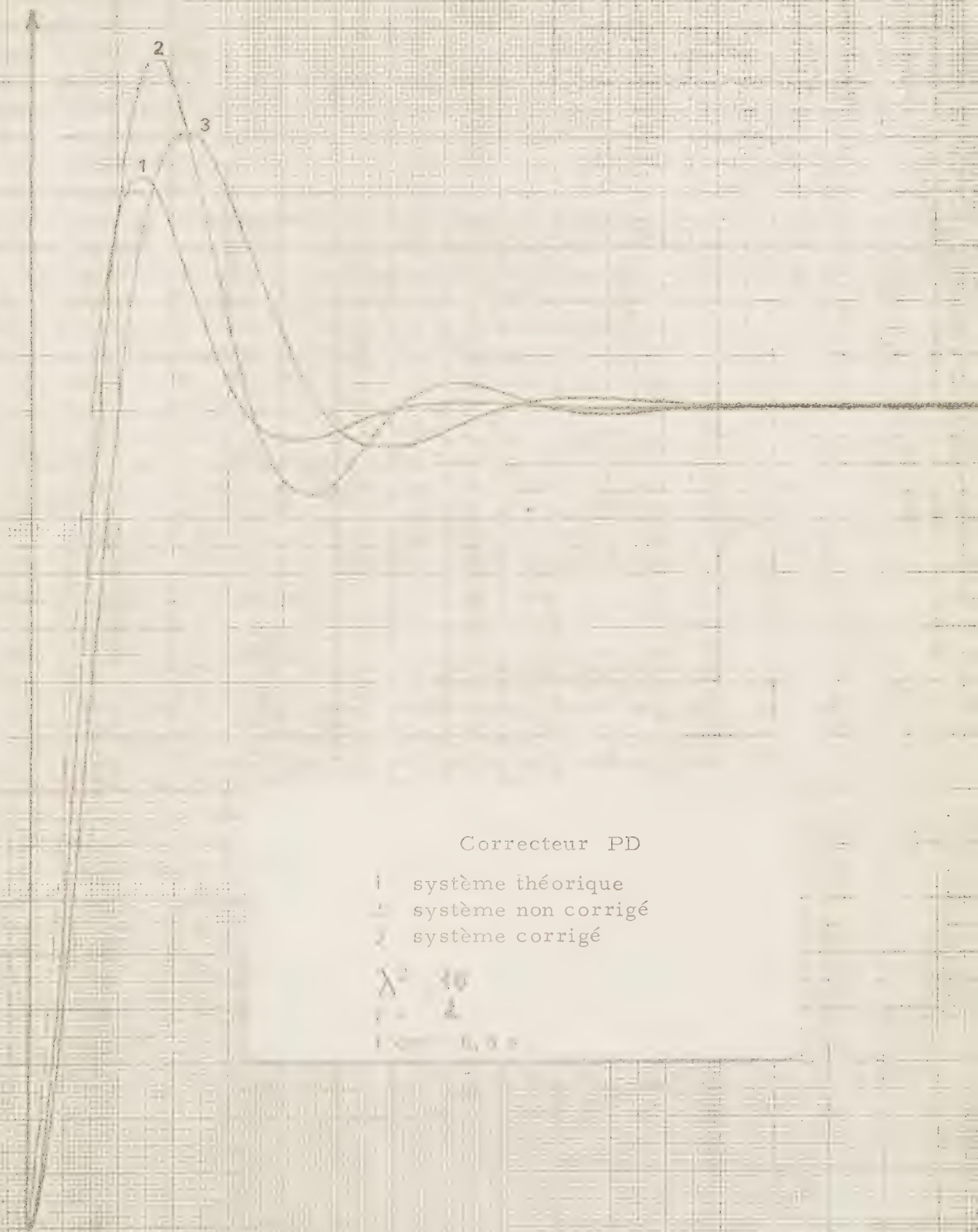
Correcteur PD

- 1 système théorique
- 2 système non corrigé
- 3 système corrigé

$$\lambda^2 = 6$$

$$\tau = 2$$

$$1 \text{ cm} = 0,8 \text{ s}$$



Correcteur PD

- 1 système théorique
- 2 système non corrigé
- 3 système corrigé

$\lambda = 40$

$\tau = 2$

$\tau_c = 0,5$

d_{2nc}	5,68	5,25	5,87	6,06	6,83	4,84	5,14	6,87
d_{2c}	5,88	5,98	5,29	6,74	6,24	4,74	4,64	5,66
d_{3nc}	7,36	6,00	5,81	6,32	7,57	5,59	5,22	5,77
d_{3c}	7,37	5,60	5,34	5,68	7,24	5,50	4,81	5,00

Tableau 4 (fin)

(dans ce tableau, l'indice nc correspond au système non corrigé, et c au système corrigé).

III. 2. 2. Résultats.

Les vingt quatre réponses indicielles obtenues, avec une calculatrice EAI, TR48, sur table traçante, sont représentées par les planches 3 à 11, relatives chacune à une installation chaque fois avec les trois types de correcteurs.

Sur chacune de ces figures, la réponse la plus performante correspond au système théorique, celle qui a le plus important dépassement correspond au système réel non corrigé, enfin celle dont le dépassement est inférieur à la moyenne arithmétique des deux précédents est pour le système réel corrigé. Le temps de réponse croît lorsqu'on passe du système théorique au système physiquement réalisable non corrigé, puis au système corrigé.

Ces résultats sont rassemblés sur le graphe 2 qui donne le taux de dépassement et le temps de réponse pour $r = 2$ et $\xi = \frac{1}{10}$ en fonction de λ^2 . Sur le même graphe, on a ajouté les résultats obtenus par la méthode des polynômes normaux, avec les relations

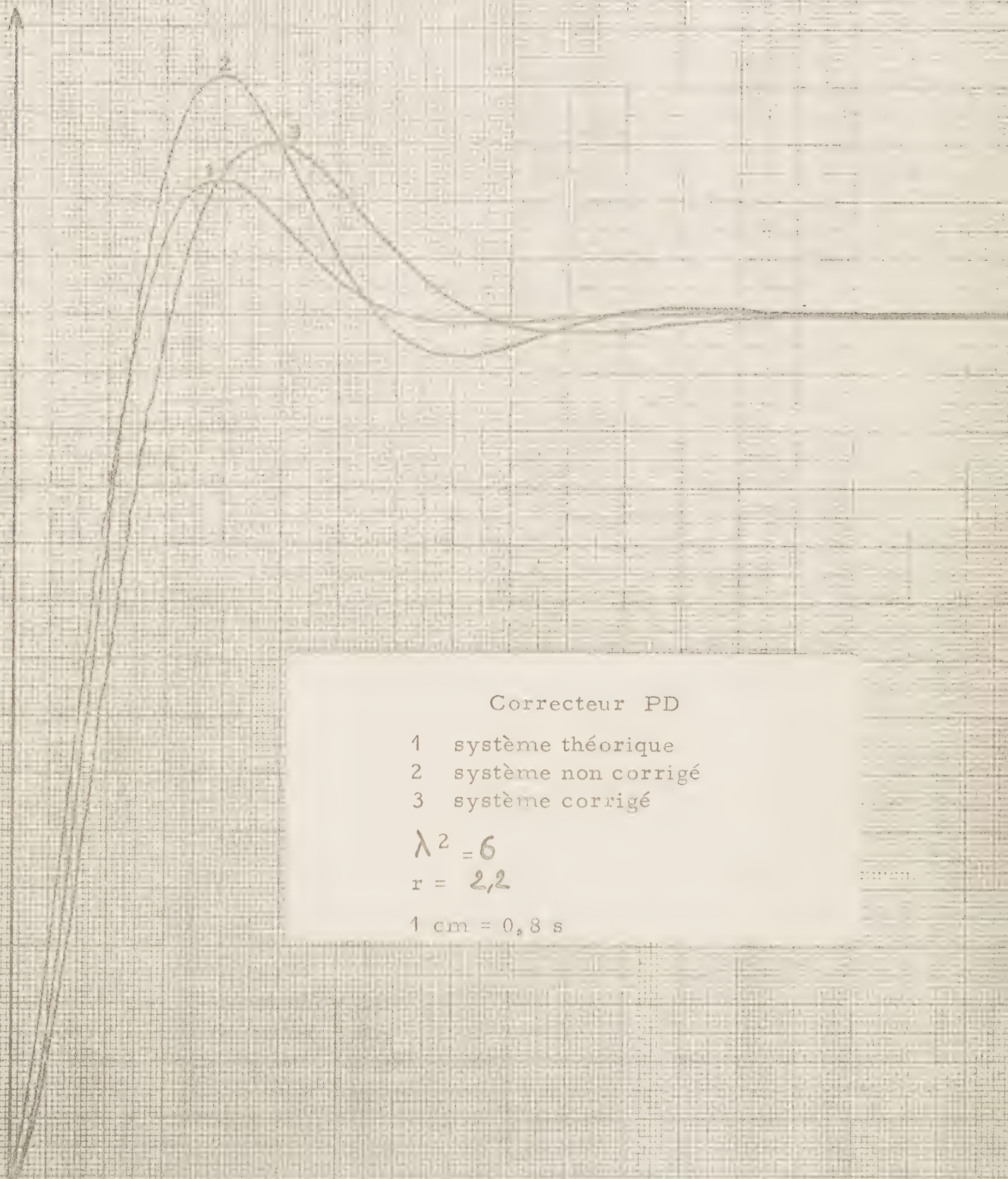
$$\log (D \%) = 1,8 - \frac{\lambda^2 (r - 1,5)}{2} \quad \text{d'une part} \quad (16) \quad [13]$$

Correcteur PD

système théorique
 système non corrigé
 système corrigé

3
 2.2

0,8 s



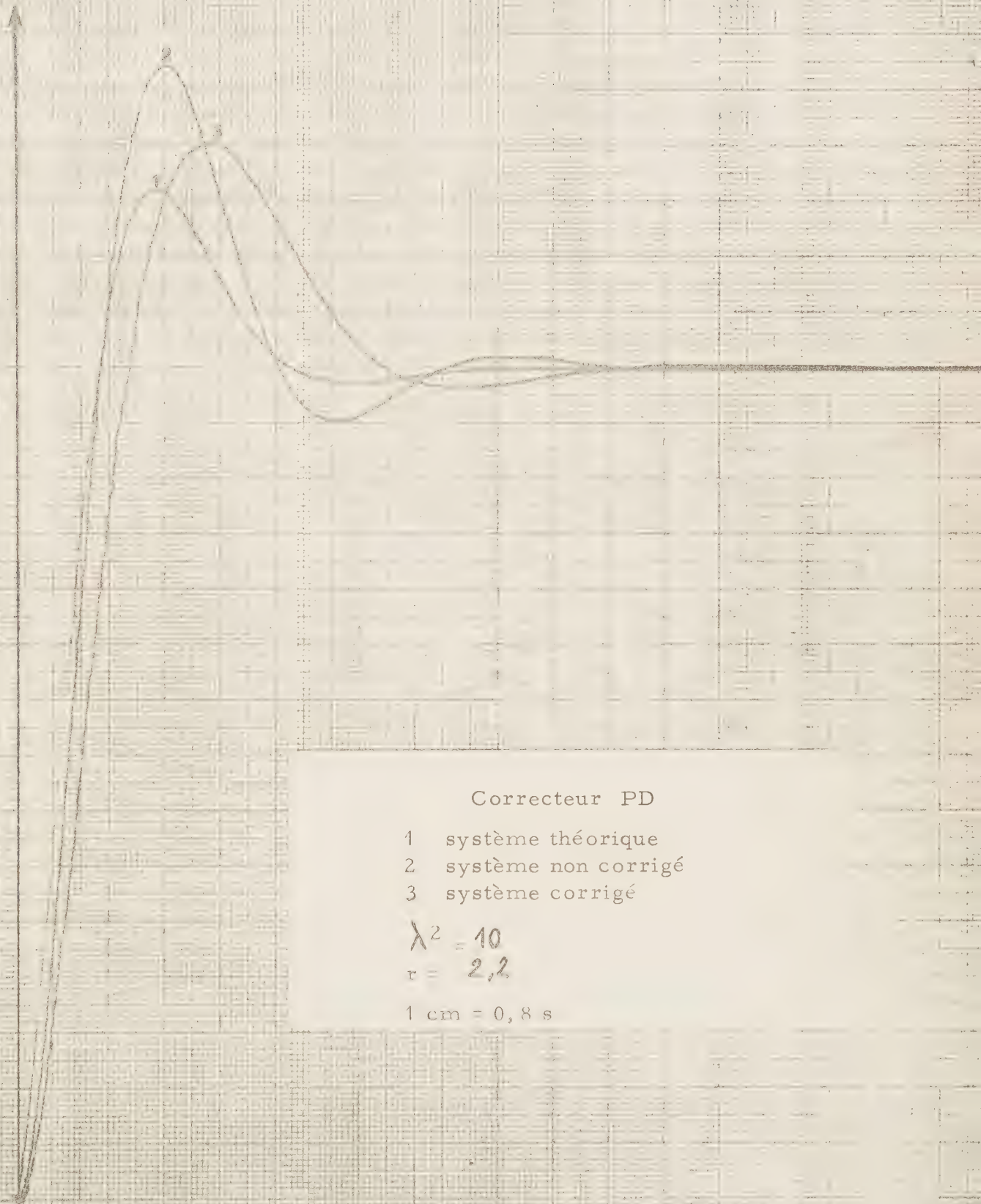
Correcteur PD

- 1 système théorique
- 2 système non corrigé
- 3 système corrigé

$$\lambda^2 = 6$$

$$r = 2,2$$

$$1 \text{ cm} = 0,8 \text{ s}$$



Correcteur PD

- 1 système théorique
- 2 système non corrigé
- 3 système corrigé

$$\lambda^2 = 10$$

$$\tau = 2,2$$

$$1 \text{ cm} = 0,8 \text{ s}$$

et

$$t = \frac{1,1}{\lambda} r^2 \left(1 + \frac{r}{\lambda^2}\right) \text{ d'autre part} \quad (17)$$

qui donne une courbe pratiquement confondue sur toute sa longueur avec celle construite à partir des résultats analogiques.

En ce qui concerne le taux de dépassement, la courbe des polynômes normaux oscille entre les deux courbes relatives au système théorique et au système physiquement réalisable corrigé, tandis que pour le système non corrigé, elle est très nettement au-dessus avec un écart absolu pour D de l'ordre de 15% dans les fortes valeurs de λ^2 .

Ces résultats prévisionnels pourraient être améliorés en rectifiant les relations (16) et (17) obtenues avec le numérateur du système théorique, alors que pour le système réel le numérateur de la fonction de transfert $F(s)$ est sensiblement modifié. En fait dans la plupart des cas, la précision suffit largement et une faible amélioration ne serait pas justifiée par la complexité accrue des relations, donc de leur utilisation.

III. 3. INTEGRALES QUADRATIQUES DE LA REPONSE.

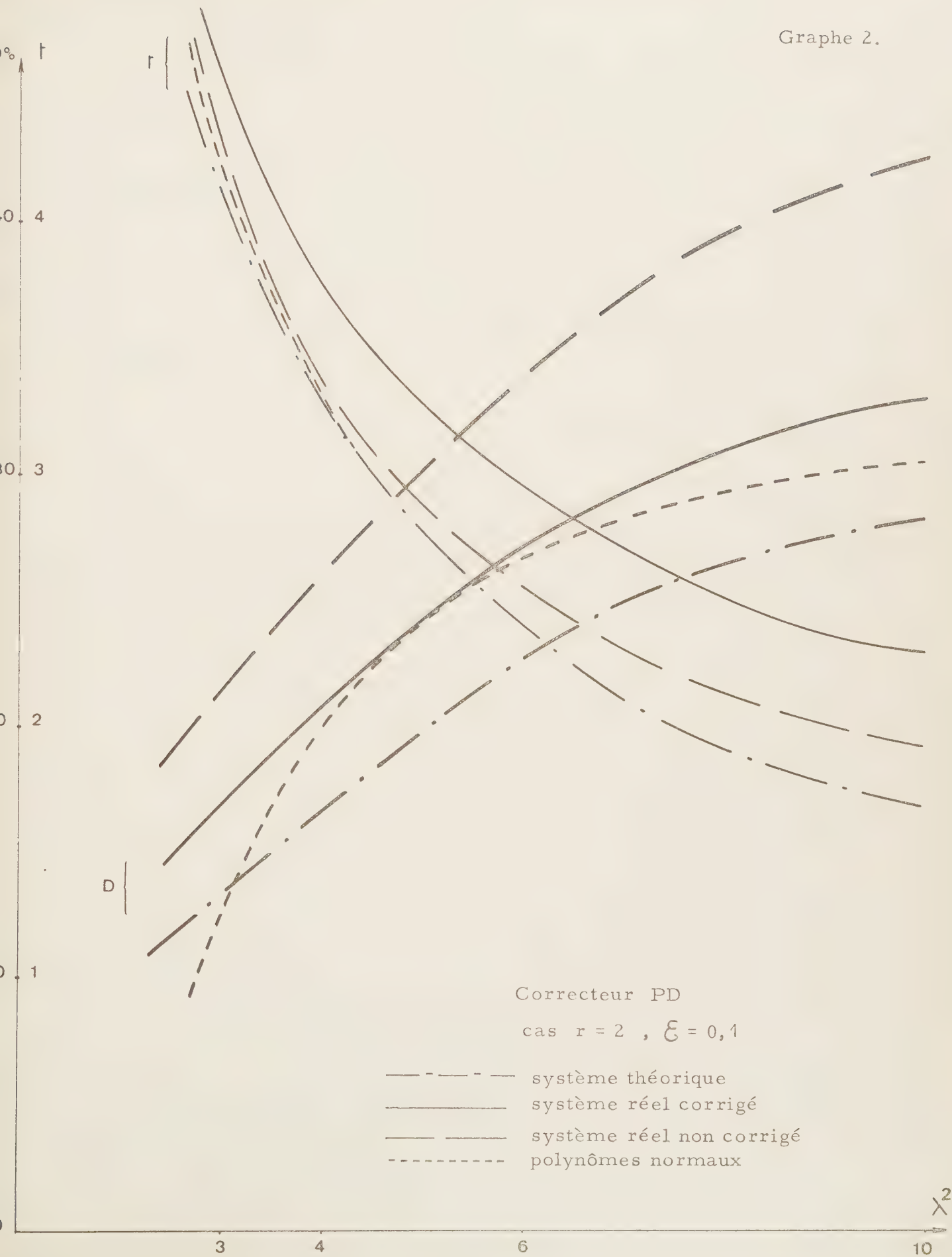
III. 3. 1. Expression des intégrales quadratiques.

Comme autre critère de performance, considérons l'intégrale quadratique de l'erreur $\xi(t)$ [14] [15]

$$J_1 = \int_0^{\infty} [\xi(t)]^2 dt$$

L'erreur

$$\xi(t) = e(t) - s(t)$$



a pour transformée de Laplace

$$\mathcal{E}(s) = \frac{E(s)}{1 + C(s) G(s)} \quad (18)$$

Après transformation, le théorème de Parseval donne pour l'intégrale

$$J_1 = \int_0^{\infty} [\mathcal{E}(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \mathcal{E}(s) \mathcal{E}(-s) ds \quad (18 \text{ bis})$$

où $\mathcal{E}(s)$ est une fraction rationnelle en s correspondant à un système stable, c'est-à-dire satisfaisant le critère de Routh, et dont le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. On pose

$$\mathcal{E}(s) = \frac{c(s)}{d(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m c_i s^i}{\sum_{i=0}^n d_i s^i} \quad \text{avec } m < n \quad [16] \quad (19)$$

La valeur de J_1 est alors donnée par les tables d'intégrales en s dont la complexité croît très rapidement avec n .

De la même manière, on définit l'intégrale quadratique de la commande

$$J_2 = \int_0^{\infty} [i(t)]^2 dt$$

où $i(t)$ est le signal d'entrée de l'installation proprement dite (figure 1). La transformation de Laplace donne

$$L[i(t)] = \mathcal{E}(s) C(s) - [E(s) - S(s)] C(s)$$

soit

$$L \left[i(t) \right] = \frac{C(s) \cdot (E(s))}{1 + C(s) G(s)} \quad (20)$$

Si n_1 , d_1 , n_2 et d_2 sont les degrés du numérateur et du dénominateur respectivement de $C(s)$ et de $G(s)$, on a, avec une entrée en échelon, pour le degré de $L[i(t)]$

$$\frac{\frac{n_1}{d_1 + 1}}{\frac{d_1 + d_2}{d_1 + d_2}} = \frac{n_1}{d_1 + 1}$$

Pour un système stable, soumis à un échelon, l'intégrale quadratique de la commande n'est donc finie que dans la mesure où le degré du numérateur du correcteur est au plus égal au degré de son dénominateur, ce qui n'est jamais le cas pour un correcteur théorique ayant au moins une action dérivée. Cette intégrale J_2 a une grande importance puisqu'elle définit la valeur quadratique moyenne de la contrainte. Pratiquement, même dans le cas où l'entrée du système est un échelon et où le correcteur est parfait, le signal de commande n'est pas infini du fait de l'existence des saturations, mais alors il est impossible d'avoir une idée de la valeur réelle de J_2 .

Au contraire, et cela représente l'intérêt de la méthode, le fait de considérer, dans la théorie, des systèmes physiquement réalisables c'est-à-dire, comme nous l'avons vu au chapitre I, des correcteurs dont le degré du numérateur est au plus égal au degré du dénominateur, permet de calculer cette intégrale J_2 .

Dans le cas du correcteur PD les rapports $\frac{c(s)}{d(s)}$ donnés par les expressions (18) et (20) pour J_1 et pour J_2 sont

$$\frac{c(s)}{d(s)} \begin{bmatrix} J_1 \end{bmatrix} = \frac{\frac{E}{s} (1 + \varepsilon \tau) s (1 + \lambda s + s^2)}{(1 + \varepsilon \tau) s (1 + \lambda s + s^2) + a \beta (1 + \tau s)} \quad (21)$$

et

$$\frac{c(s)}{d(s)} \begin{bmatrix} J_2 \end{bmatrix} = \frac{\beta \frac{1 + \tau s}{1 + \varepsilon \tau s} \cdot (1 + \varepsilon \tau s) s (1 + \lambda s + s^2) \frac{E}{s}}{(1 + \varepsilon \tau) s (1 + \lambda s + s^2) + a \beta (1 + \tau s)} \quad (22)$$

En ordonnant les polynômes en s , on obtient pour la première

$$\frac{c(s)}{d(s)} \begin{bmatrix} J_1 \end{bmatrix} = E \cdot \frac{1 + s(\varepsilon \tau + \lambda) + s^2(\varepsilon \tau \lambda + 1) + s^3 \varepsilon \tau}{a \beta + s(a \beta \tau + 1) + s^2(\varepsilon \tau + \lambda) + s^3(1 + \varepsilon \tau \lambda) + s^4 \varepsilon \tau} \quad (23)$$

avec

$$\frac{c(s)}{d(s)} \begin{bmatrix} J_{1o} \end{bmatrix} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c(s)}{d(s)} \begin{bmatrix} J_1 \end{bmatrix}$$

et

$$\frac{c(s)}{d(s)} \begin{bmatrix} J_{1nc} \end{bmatrix} = \frac{c(s)}{d(s)} \begin{bmatrix} J_1 (a \beta = a \beta_o, \tau = \tau_o) \end{bmatrix}$$

en reprenant les indices "o" pour le système théorique et "nc" pour le système non corrigé.

Le quotient (22) devient de la même manière

$$\frac{c(s)}{d(s)} \begin{bmatrix} J_2 \end{bmatrix} = \frac{E}{a} \cdot \frac{1 + s(\tau + \lambda) + s^2(1 + \lambda \tau) + s^3 \tau}{1 + \frac{a \beta \tau + 1}{a \beta} s + \frac{\varepsilon \tau + \lambda}{a \beta} s^2 + \frac{1 + \varepsilon \tau \lambda}{a \beta} s^3 + \frac{\varepsilon \tau}{a \beta} s^4}$$

Pour une intégrale d'ordre 4, avec les notations de (19), les tables donnent,

$$I_4 = \frac{c_3^2 (d_1 d_2 - d_o d_3) d_o + (c_2^2 - 2c_1 c_3) d_o d_1 d_4 + (c_1^2 - 2c_o c_2) d_o d_3 d_4 + c_o^2 (d_2 d_3 - d_1 d_4) d_4}{2d_o d_4 (-d_o d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)}$$

III. 3. 2. Résultats.

.....

Sur Programma 101 ou IBM 1130, nous avons calculé pour $\lambda^2 = 3, 4, 6$ et 10 et pour $r = 1,8, 2$ et $2,2$:

* J_{10} correspondant au système théorique,

* les intégrales J_{1nc} et J_{2nc} du système réel **non** corrigé pour $\xi = 0,1, 0,05$ et $0,01$.

* les intégrales J_1 et J_2 du système réel avec coefficients corrigés.

Les résultats relatifs aux cas $r = 1,8$ et $r = 2,2$ ont été rassemblés dans le tableau 5, tandis que les courbes correspondant au cas $r = 2$ sont tracées sur le graphe 3.

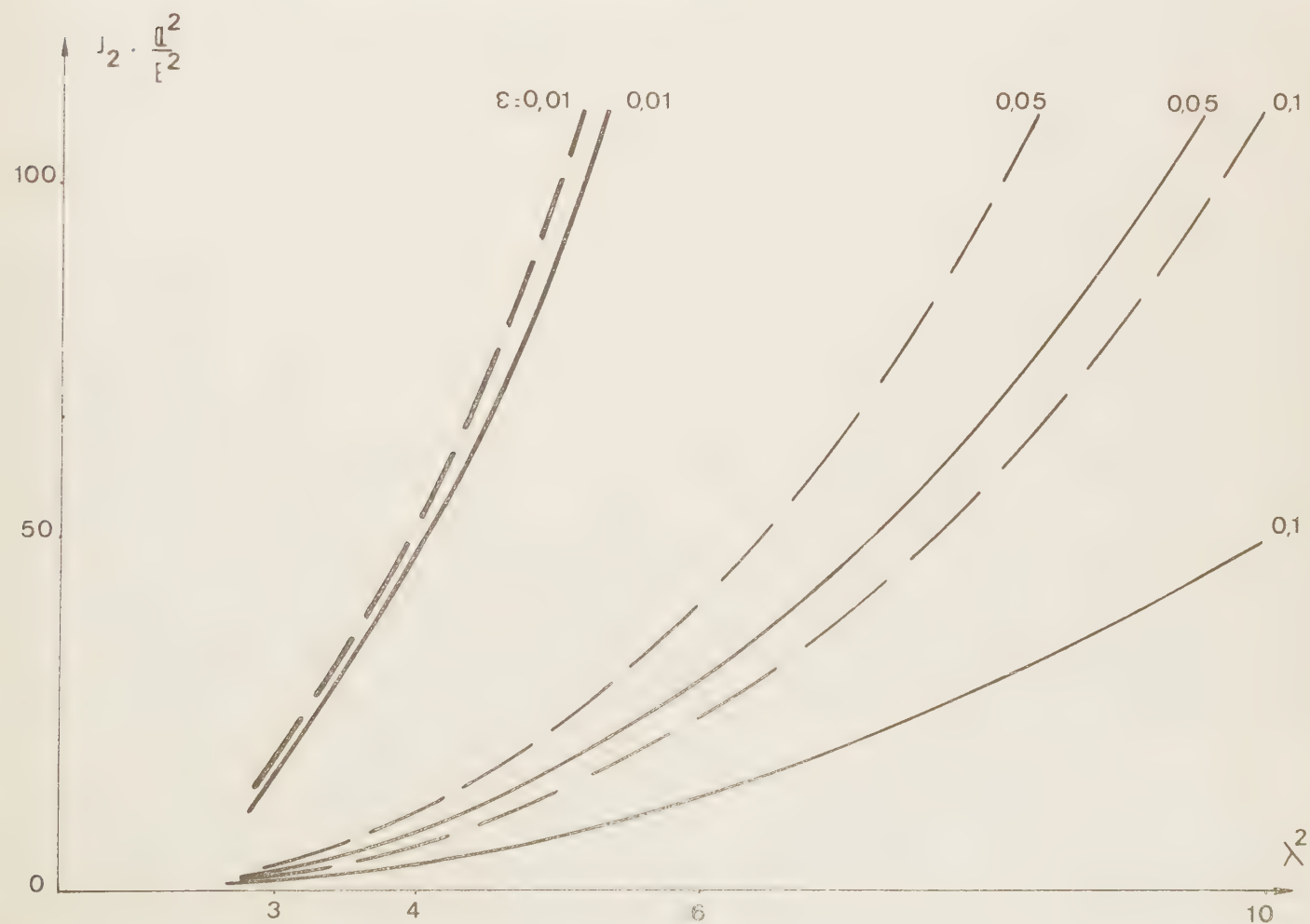
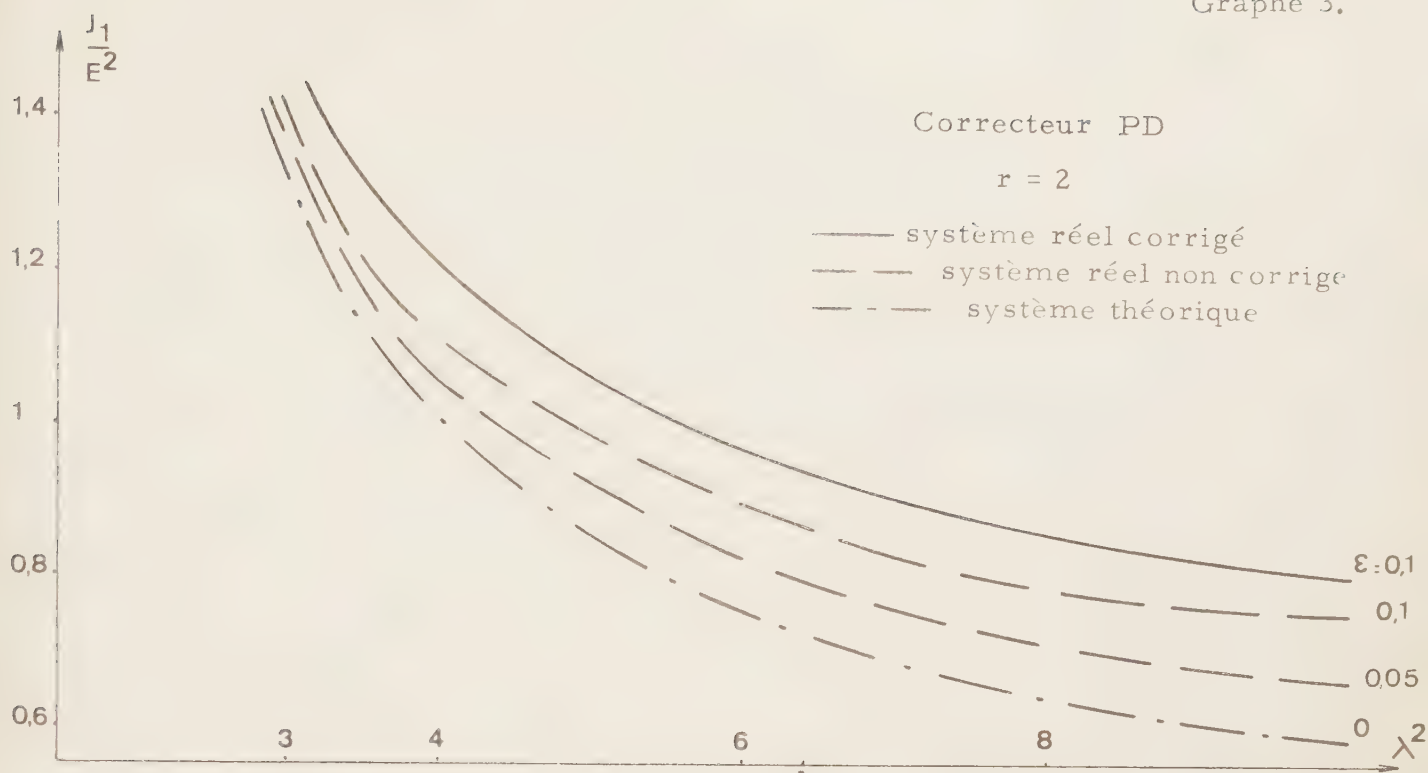
Dans les conditions les plus défavorables, le système corrigé conduit à une intégrale quadratique de l'erreur 30 % supérieure au système théorique et 7 % supérieure au système non corrigé. Dans les mêmes cas, l'intégrale quadratique du signal de commande est 20 fois plus petite lorsque ξ passe de 0,01 à 0,1 et 2,5 fois plus petite lorsque ξ passe de 0,05 à 0,1, ce qui montre comment elle tend vers l'infini quand ξ tend vers zéro.

En outre, pour le système corrigé, J_2 est très sensiblement plus faible que pour le système non corrigé, surtout pour les fortes valeurs de ξ .

III. 4. CONCLUSION.

Nous constatons que l'emploi d'un correcteur PD physiquement réalisable dégrade toujours sensiblement les performances du système théorique. La solution qui consiste à tenir compte du caractère

Graphe 3.



INTEGRALES QUADRATIQUES POUR LE CORRECTEUR PD

r	1, 8				2, 2			
λ^2	3	4	6	10	3	4	6	10
J_{10}	1,1552	0,9243	0,7356	0,5820	1,5779	1,1231	0,802	0,597
$J_{1nc}^{0,1}$	1,2412	1,0457	0,8952	0,7686	1,6387	1,2179	0,9328	0,7522
$J_{1nc}^{0,05}$	1,1907	0,9817	0,8111	0,6928	1,6075	1,1695	0,8649	0,6711
$J_{1nc}^{0,01}$	1,1581	0,9266	0,7435	0,6464	1,5786	1,1299	0,8071	0,6027
$J_{1c}^{0,1}$	1,2891	1,0859	0,9164	0,7749	1,7731	1,3809	1,0678	0,8491
$J_{1c}^{0,05}$	1,2220	1,0038	0,8227	0,6797	1,6755	1,2517	0,9326	0,7189
$J_{1c}^{0,01}$	1,1583	0,9332	0,7497	0,6315	1,5915	1,1461	0,8243	0,6287
$J_{2nc}^{0,1}$	4,1528	11,3390	40,945	184,45	1,3019	3,9708	15,3065	70,9343
$J_{2nc}^{0,05}$	7,1103	19,676	70,1484	315,45	2,1892	7,0439	27,2450	124,0769
$J_{2nc}^{0,01}$	31,2409	88,2368	315,04	1509	9,3761	32,0401	123,4059	549,4571
$J_{2c}^{0,1}$	3,3173	7,8492	23,9074	92,1360	1,0198	2,5153	7,5927	28,3156
$J_{2c}^{0,05}$	6,3304	16,2676	53,0708	215,8214	1,9167	5,5276	18,7991	76,0732
$J_{2c}^{0,01}$	30,5769	84,3035	296,1724	1698,0	9,0777	30,1272	114,7922	510,7045

Tableau 5.

physiquement réalisable du correcteur pour définir ses coefficients est intéressante car elle permet d'améliorer le taux de dépassement et de déterminer la valeur quadratique de la contrainte, au prix d'une légère augmentation du temps de réponse et de l'intégrale quadratique de l'erreur. La méthode proposée est simple : à partir du moment où on a déterminé les fonctions de correction k_1 et k_2 , il suffit de calculer les coefficients du correcteur à partir des coefficients théoriques, donnés toujours simplement, par la méthode des polynômes normaux.

Au chapitre suivant, où nous avons repris les mêmes calculs pour le correcteur PI, nous verrons que l'intérêt de la méthode est beaucoup plus limité.

* . * . * . *

CHAPITRE IV

CORRECTEUR PI PHYSIQUEMENT REALISABLE

IV.1. COEFFICIENTS CORRIGES.

L'expression (5) (p. 8) permet d'écrire pour la fonction de transfert en boucle fermée (figure 1)

$$F(s) = \frac{a\beta x(1 + \bar{t}'s)}{(1 + \bar{t}s)a\beta x + (1 + x\bar{t}'s)(1 + \lambda s + s^2)s}$$

soit en ordonnant en s

$$F(s) = \frac{a\beta x + a\beta x\tau's}{a\beta x + s(1 + a\beta x\tau') + s^2(x\tau' + \lambda) + s^3(1 + x\tau'\lambda) + x\tau's^4} \quad (1)$$

avec toujours

$$F_o(s) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(s)$$

soit

$$F_o(s) = \frac{a\beta_o + a\beta_o\tau'_os}{a\beta_o + sa\beta_o\tau'_o + s^2\tau'_o + s^3\lambda\tau'_o + s^4\tau'_o} \quad (2)$$

Contrairement au cas précédent, l'ordre de $F_o(s)$ n'est pas plus faible que celui de $F(s)$.

Les deux premiers rapports caractéristiques sont

$$r_1 = \frac{(1 + a \beta_x \bar{t}')^2}{a \beta_x (x \bar{t}' + \lambda)} \quad (3)$$

et

$$r_2 = \frac{(x \tau' + \lambda)^2}{(1 + a \beta x \tau')(1 + x \tau' \lambda)} \quad (4)$$

avec

$$r_{i0} = \lim_{x \rightarrow \infty} r_i$$

soit

$$r_{10} = a \beta_0 \tau'_0 \quad (5)$$

$$r_{20} = \frac{1}{a \beta_0 \lambda} \quad (6)$$

Ainsi

$$a \beta_0 = \frac{1}{\lambda r} \quad (7)$$

et

$$\tau'_0 = \lambda r^2 \quad (8)$$

En négligeant les termes qui n'ont pas x en facteur, au numérateur et au dénominateur, on a pour (3) et (4),

$$r_1 = \frac{(a \beta x \tau')^2 + 2 a \beta x \tau'}{a \beta x^2 \tau' + a \beta x \lambda}$$

et

$$r_2 = \frac{(x \tau')^2 + 2 x}{a \beta x^2 \tau'^2 \lambda + x \tau' (a \beta + \lambda)}$$

soit encore, avec $\frac{1}{x} = \varepsilon$,

$$r_1 = a \beta \tau' \cdot \frac{1 + \frac{2 \varepsilon}{a \beta \tau'}}{1 + \varepsilon \frac{\lambda}{\tau'}} \quad (9)$$

et

$$r_2 = \frac{1 + \frac{2 \lambda \varepsilon}{\tau'}}{a \beta \lambda \left[1 + \frac{\varepsilon (a \beta + \lambda)}{a \beta \lambda \tau'} \right]} \quad (10)$$

En reportant (7) et (8) dans (9) et (10), et en supposant que l'ordre de grandeur de $a\beta$ et de τ est conservé, on obtient pour les fonctions d'erreur k_1 et k_2

$$k_1 = \frac{r_1}{a\beta\tau'} = \frac{1 + \frac{2\xi}{r}}{1 + \frac{\xi}{r^2}} \quad (11)$$

et

$$k_2 = r_2(a\beta\lambda) = \frac{1 + \frac{2\xi}{r^2}}{1 + \xi \cdot \frac{1 + \lambda^2 r}{\lambda^2 r^2}} \quad (12)$$

desquelles on déduit, lorsque le polynôme est normal, $r_1 = r_2 = r$,

$$a\beta = \frac{k_2}{r\lambda} \quad (13)$$

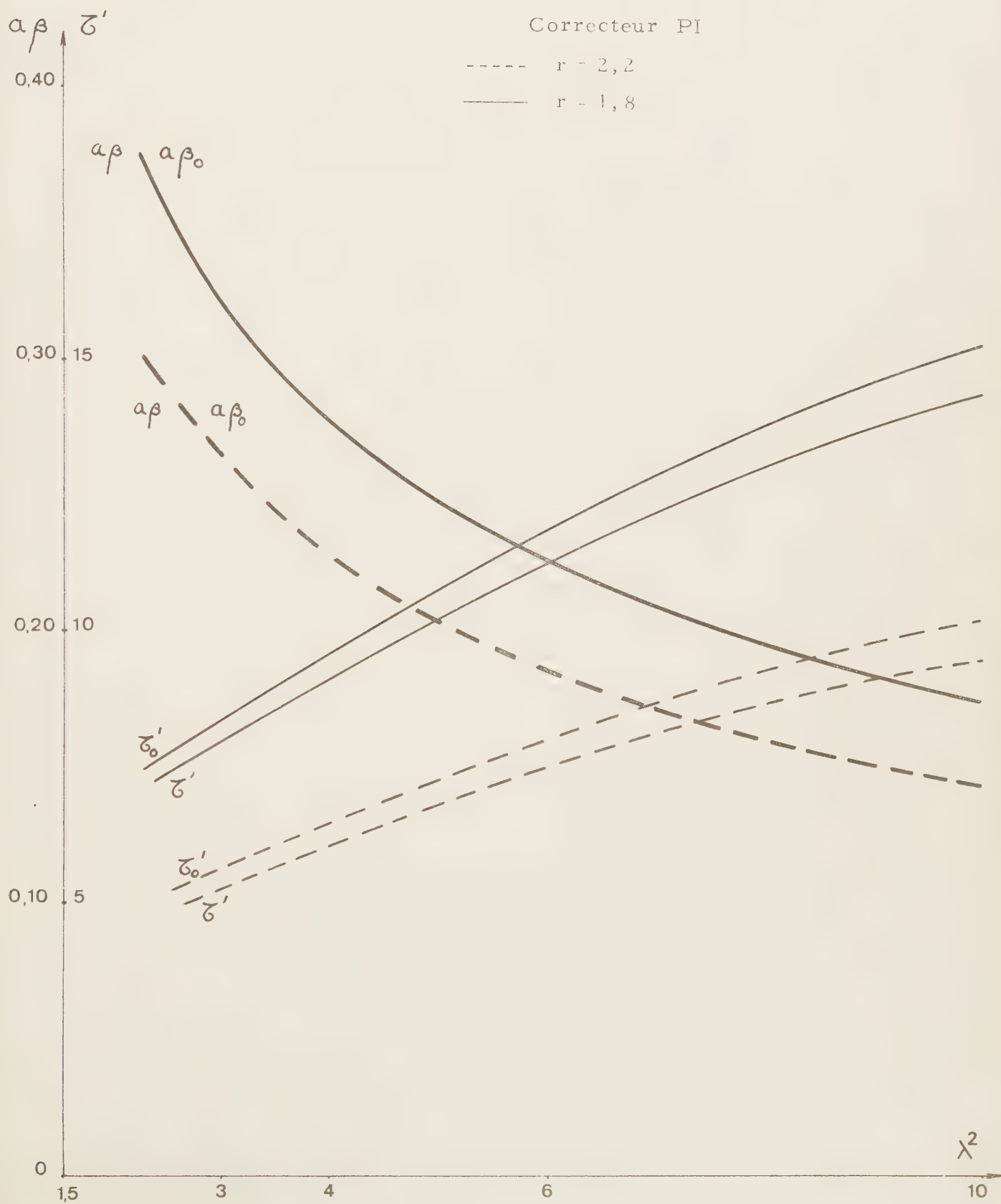
et

$$\tau' = \frac{r^2 \lambda}{k_1 k_2} \quad (14)$$

Les fonctions k_1 et k_2 restent toujours très voisines de 1, k_1 étant en outre indépendante de λ .

Dans le tableau 6, on trouve les valeurs de $a\beta_0$, τ'_0 , ainsi que $a\beta$ et τ' dans la plage habituelle de variations de λ^2 , pour $r = 1,8$ et $2,2$ et avec $\xi = \frac{1}{10}$. On constate que l'écart relatif pour $a\beta$ est toujours inférieur à 1%, les deux courbes du graphe 4 étant confondues, tandis que pour τ cet écart relatif varie de 8% pour $r = 1,8$ et $\lambda^2 = 3$ à 5% pour $r = 2,2$ et $\lambda^2 = 3$.

Les intégrales quadratiques dont les expressions réduites sont données par (15) et (16) sont toutes deux plus faibles pour le système corrigé que pour le système théorique et encore plus faible pour le système non corrigé, mais les écarts relatifs maxima restent toujours



r	1, 8					2					2, 2				
	3	4	6	10		3	4	6	10		3	4	6	10	
λ^2															
$a\beta_o$	0, 320	0, 277	0, 226	0, 175		0, 288	0, 250	0, 204	0, 158		0, 262	0, 227	0, 185	0, 143	
τ_o	5, 611	6, 480	7, 936	10, 245		6, 928	8, 000	9, 797	12, 649		8, 383	9, 680	11, 855	15, 305	
$a\beta^{0,1}$	0, 319	0, 277	0, 227	0, 176		0, 286	0, 248	0, 203	0, 157		0, 259	0, 225	0, 184	0, 142	
$\tau^{0,1}$	5, 226	6, 020	7, 356	9, 478		6, 507	7, 498	9, 166	11, 814		7, 926	9, 137	11, 172	14, 405	
J_{2o}	0, 571	0, 478	0, 379	0, 287		0, 428	0, 362	0, 290	0, 221		0, 342	0, 291	0, 234	0, 179	
J_{2nc}	0, 515	0, 432	0, 343	0, 260		0, 395	0, 335	0, 268	0, 204		0, 320	0, 272	0, 219	0, 168	
J_{2c}	0, 540	0, 454	0, 362	0, 275		0, 404	0, 344	0, 277	0, 212		0, 324	0, 277	0, 223	0, 171	
J_{1o}	4, 044	4, 475	5, 281	6, 637		3, 836	4, 300	5, 131	6, 497		3, 778	4, 267	5, 119	6, 511	
J_{1nc}	3, 656	4, 052	4, 784	6, 025		3, 547	3, 978	4, 748	6, 013		3, 544	4, 002	4, 801	6, 107	
J_{1c}	3, 737	4, 185	4, 930	6, 287		3, 650	4, 079	4, 862	6, 220		3, 619	4, 085	4, 895	6, 280	

Tableau 6.

CORRECTEUR PI PHYSIQUEMENT REALISABLE

inférieurs à 10 % ,

$$\frac{J_1}{E^2} = \frac{1 + s(x\tau' + \lambda) + s^2(x\tau'\lambda + 1) + s^3x\tau'}{a\beta x + s(1 + a\beta x\tau') + s^2(x\tau' + \lambda) + s^3(x\tau'\lambda + 1) + s^4x\tau'} \quad (15)$$

et

$$J_2 \cdot \frac{a^2}{E^2} = \frac{1 + s(\tau' + \lambda) + s^2(\tau'\lambda + 1) + s^3\tau'}{\frac{1}{a\beta x} [a\beta x + s(1 + a\beta x\tau') + s^2(x\tau' + \lambda) + s^3(x\tau'\lambda + 1) + s^4x\tau']} \quad (16).$$

IV.2. VERIFICATION ANALOGIQUE.

Planche 12, on a les réponses du système simulé analogiquement selon le schéma de la figure 6, dans les trois cas habituels : système théorique, système réel non corrigé et système corrigé pour $\lambda^2 = 3$ et 4 , $r = 2,2$ et $\xi = 0,1$. Les valeurs des coefficients sont données tableau 7.

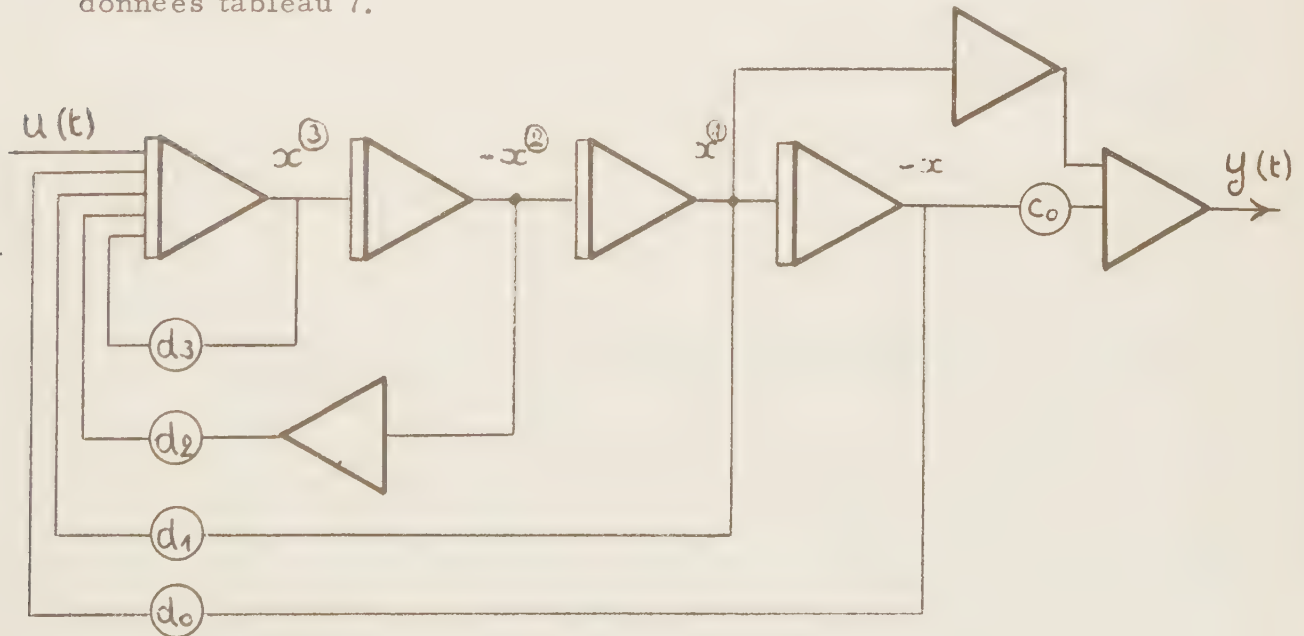
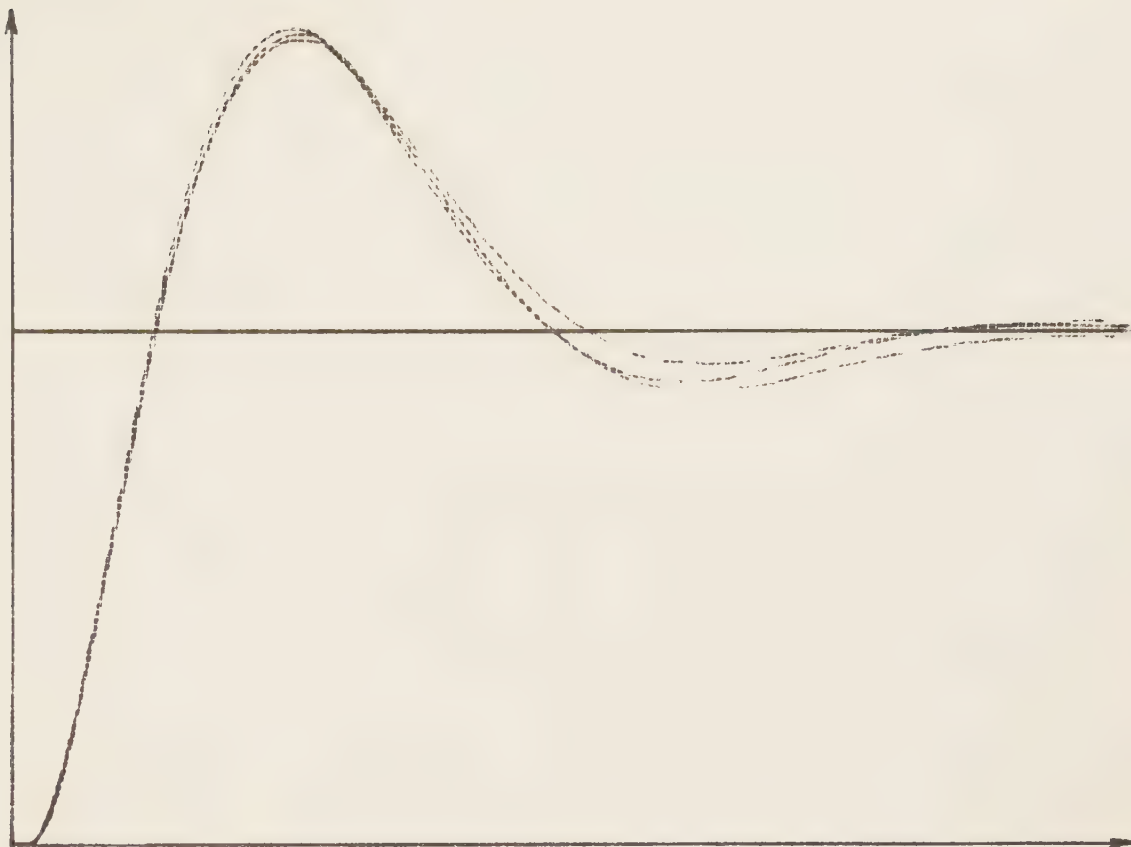


Figure 6.

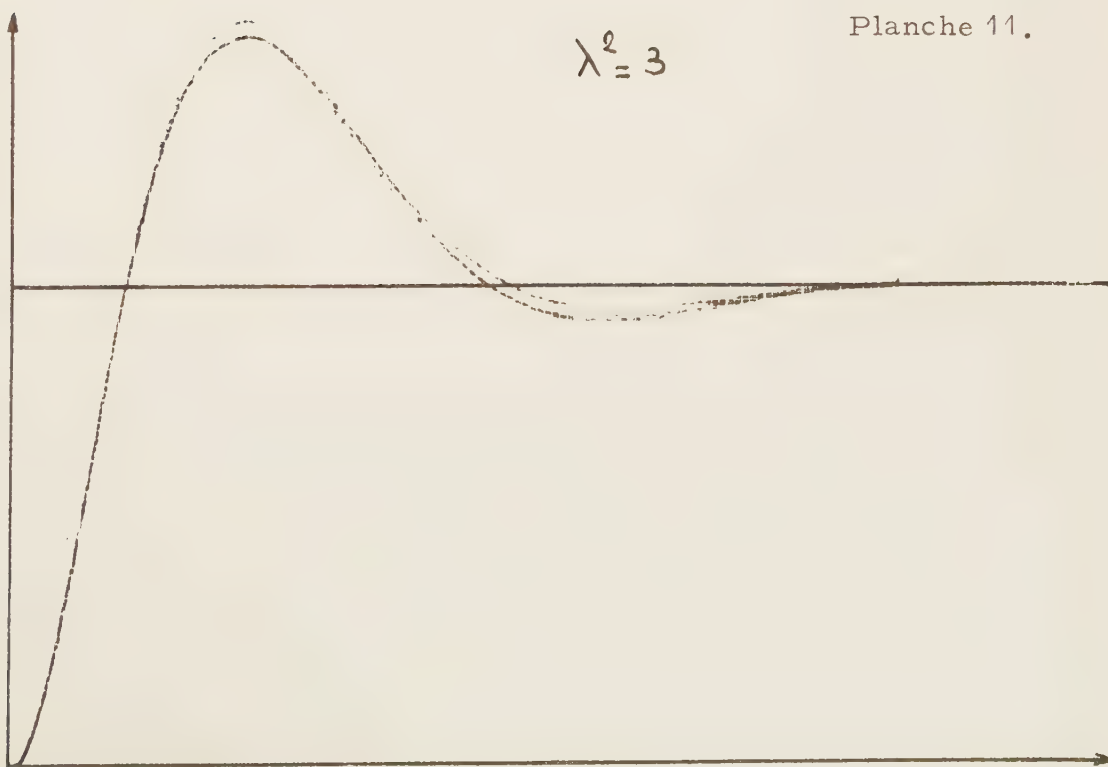
Simulation analogique de $F(s) = \frac{s + c_0}{d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + d_3 s^3 + s^4}$



$$\lambda^2 = 4$$

Correcteur PI

$$r = 2,2$$



$$\lambda^2 = 3$$

Planche 11.

cas	théorique	corrigé	non corrigé	théorique	corrigé	non corrigé
c_o	0,119	0,126	0,119	0,103	0,109	0,103
d_o	0,031	0,033	0,031	0,023	0,025	0,023
d_1	0,262	0,272	0,273	0,227	0,236	0,237
d_2	1,000	1,02	1,02	1,000	1,02	1,02
d_3	1,73	1,74	1,74	2,000	2,01	2,01
λ^2	3			4		

Tableau 7.

Les courbes sont très voisines l'une de l'autre, ce qui, compte tenu de résultats sur les intégrales quadratiques, montre le peu d'intérêt de notre méthode dans le cas du correcteur PI.

* . * . * . *

CHAPITRE V

CORRECTEUR PID PHYSIQUEMENT REALISABLE

V.1. COEFFICIENTS DU CORRECTEUR. [17]

L'expression (6) (p. 9) donne, avec $G(s)$, l'expression $F(s)$ de la fonction de transfert en boucle fermée

$$F(s) = \frac{a\beta'x(1+s\tau'+s^2\tau\tau')}{(1+s\tau'+s^2\tau\tau')a\beta'x+s(2+sx\tau'+2s^2\tau\tau')(1+\lambda s+s^2)} \quad (1)$$

soit

$$F(s) = \frac{a\beta'x(1 + s\tau' + s^2\tau\tau')}{a^3x + s(2 + a\beta'x\tau') + s^2(a^2x\tau\tau' + x\tau' + 2\lambda) + s^3(2\tau\tau' + \lambda x\tau' + 2) + s^4(2\lambda\tau\tau' + x\tau') + s^5 2\tau\tau'}$$

Les rapports caractéristiques sont alors

$$r_1 = \frac{(2 + a\beta'x\tau)^2}{a\beta'x(a\beta'x\tau + x\tau + 2\lambda)} \quad \text{avec} \quad r_{10} = \lim_{x \rightarrow \infty} r_1 = \frac{a\beta'_0\tau_0}{1 + a\beta'_0\tau_0} \quad (3)$$

$$r_2 = \frac{(a\beta_{x\tau}\tau + x\tau + 2\lambda)^2}{(2+a\beta_{x\tau})(2\tau\tau + \lambda x\tau + 2)} \quad \text{avec} \quad r_{20} = \lim_{x \rightarrow \infty} r_2 = \frac{(1+a\beta_o\tau_o)^2}{\lambda a\beta_o} \quad (4)$$

et

$$r_3 = \frac{(2\tau\tau' + \lambda x\tau' + 2)^2}{(2\lambda\tau\tau' + x\tau)(a\beta x\tau\tau' + x\tau' + 2\lambda)} \quad \text{avec} \quad r_{30} = \lim_{x \rightarrow \infty} r_3 = \frac{\lambda^2}{1 + a\beta_0\tau_0} \quad (5)$$

Des expressions de r_{10} , on déduit immédiatement les valeurs des coefficients du correcteur théorique par

$$a\beta_o = \frac{\lambda^3}{r^3} \quad (6)$$

$$\tau'_o = \frac{r^3}{\lambda} \quad (7)$$

et

$$\tau_o = \frac{r^2}{\lambda^3} (\lambda^2 - r) \quad (8)$$

Pour les rapports caractéristiques, avec la même approximation que dans les cas précédents, on a d'abord pour r_3 , toujours avec $\varepsilon = \frac{1}{x}$ et $\beta' = \beta(1 + \varepsilon)$,

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{\lambda^2 \tau'^2 + 4\varepsilon(\tau\tau' + 1)\lambda\tau'}{\tau'^2 \left[1 + a\beta\tau(1 + \varepsilon) \right] + 2\lambda\tau\tau'\varepsilon(a\beta\tau + 1) + 2\lambda\tau'\varepsilon} \quad (9) \\ &= \frac{\lambda^2 + \frac{4\varepsilon\lambda}{1 + \tau\tau'}}{1 + a\beta\tau + \varepsilon \left[a\beta\tau + 2\lambda\tau(a\beta\tau + 1) + \frac{2\lambda}{\tau'} \right]} \end{aligned}$$

soit, en faisant apparaître la forme de r_{30}

$$r_3 = \frac{\lambda^2}{1 + a\beta\tau} \cdot \frac{1 + \frac{4\varepsilon}{\lambda\tau'}(1 + \tau\tau')}{1 + \varepsilon \frac{a\beta\tau + 2\lambda\tau(a\beta\tau + 1) + \frac{2\lambda}{\tau'}}{1 + a\beta\tau}}$$

ou enfin, en reportant dans la fonction d'erreur les expressions (6), (7) et (8) des paramètres du correcteur théorique,

$$r_3 = \frac{\lambda^2}{1 + a\beta\tau} \cdot \frac{1 + \frac{4\varepsilon}{r^3} \left[1 + \frac{r^5}{\lambda^4} (\lambda^2 - r) \right]}{1 + \varepsilon \frac{-\frac{\lambda^2 - r}{r} + 2 \frac{r^2}{\lambda^2} (\lambda^2 - r) \cdot \frac{\lambda^2}{r} + \frac{2\lambda^2}{r^3}}{\frac{r^2}{\lambda^2}}}$$

On a donc

$$r_3 = \frac{\lambda^2}{1 + a\beta\tau} \cdot k_3 \quad (10)$$

avec

$$k_3 = \frac{1 + \frac{4\varepsilon}{r^3\lambda^4} \left[\lambda^4 + r^5(\lambda^2 - r) \right]}{1 + \frac{\varepsilon}{r^2\lambda^2} \left[r^2(\lambda^2 - r) + 2(\lambda^2 - r)r^4 + 2\lambda^2 \right]} \quad (11)$$

dont la valeur maximale obtenue à la limite pour $\lambda^2 \rightarrow \infty$ est

$$k_3 \text{ lim} = \frac{1 + \frac{4\varepsilon}{r^3}}{1 + \varepsilon(1 + 2r^2)}$$

De la même manière, le deuxième rapport caractéristique s'écrit

$$r_2 = \frac{(1 + a\beta\tau)^2}{\lambda a\beta} \cdot \frac{1 + \frac{2\varepsilon}{\tau'} \cdot \frac{2\lambda + a\beta\tau\tau'}{1 + a\beta\tau}}{1 + 2\varepsilon \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda} \left(\tau + \frac{1}{\tau'} \right) + \frac{1}{a\beta\tau'} \right]}$$

soit

$$r_2 = \frac{(1 + a\beta\tau)^2}{\lambda a\beta} \cdot k_2 \quad (12)$$

avec

$$k_2 = \frac{1 + \frac{2\varepsilon}{\tau'} \cdot \frac{2\lambda + a\beta\tau\tau'}{1 + a\beta\tau}}{1 + 2\varepsilon \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda} \left(\tau + \frac{1}{\tau'} \right) + \frac{1}{a\beta\tau'} \right]}$$

En remplaçant les paramètres par leur expression donnée pour le système théorique, la fonction d'erreur devient

$$k_2 = \frac{1 + \frac{2\varepsilon}{r^2\lambda^2} \left[2\lambda^2 + (\lambda^2 - r)r^2 \right]}{1 + 2\varepsilon \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{r^5(\lambda^2 - r) + \lambda^4}{\lambda^4 r^3} \right]} \quad (13)$$

dont la valeur extrême la plus éloignée de 1 obtenue pour $\lambda^2 \rightarrow \infty$ lorsque $r < 1,8$ est

$$k_2 \lim = \frac{1 + 2 \varepsilon \frac{2 + r^2}{r^2}}{1 + \varepsilon \left(1 + \frac{2}{r^3}\right)}$$

et pour $\lambda^2 = r$ lorsque $r > 1,8$,

$$k_2 \lim = \frac{1 + \frac{4 \varepsilon}{r^2}}{1 + \varepsilon \left(1 + \frac{2}{r} + \frac{2}{r^3}\right)}$$

Enfin, pour le premier rapport caractéristique, on a

$$r_1 = \frac{a \beta \tau'}{1 + a \beta \tau} \cdot \frac{1 + 2 \varepsilon \left(1 + \frac{2}{a \beta \tau'}\right)}{1 + \varepsilon \left[1 + \frac{a \beta \tau}{1 + a \beta \tau} + \frac{2 \lambda}{\tau' (1 + a \beta \tau)}\right]}$$

donc

$$r_1 = \frac{a \beta \tau'}{1 + a \beta \tau} k_1 \quad (14)$$

$$\text{où } k_1 = \frac{1 + 2 \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\lambda^2}\right)}{1 + \varepsilon \left(1 + \frac{2}{r^2} + \frac{\lambda^2 - r}{\lambda^2}\right)} \quad (15)$$

est une fonction continument décroissante de λ^2 dont la valeur extrême pour $\lambda^2 \rightarrow \infty$, est

$$k_1 \lim = \frac{1 + 2 \varepsilon}{1 + 2 \varepsilon \left(1 + \frac{1}{r^2}\right)}$$

Les valeurs extrêmes des fonctions d'erreur restent toujours suffisamment voisines de 1, ce qui justifie l'hypothèse qui permet de les déterminer.

Des expressions (10), (12) et (14), on déduit les paramètres corrigés du régulateur,

$$a\beta = a\beta_o k_3^2 k_2 \quad (16)$$

$$\tau = \frac{r^2}{\lambda} \cdot \frac{1}{k_3 k_2} - \frac{1}{a\beta} \quad (17)$$

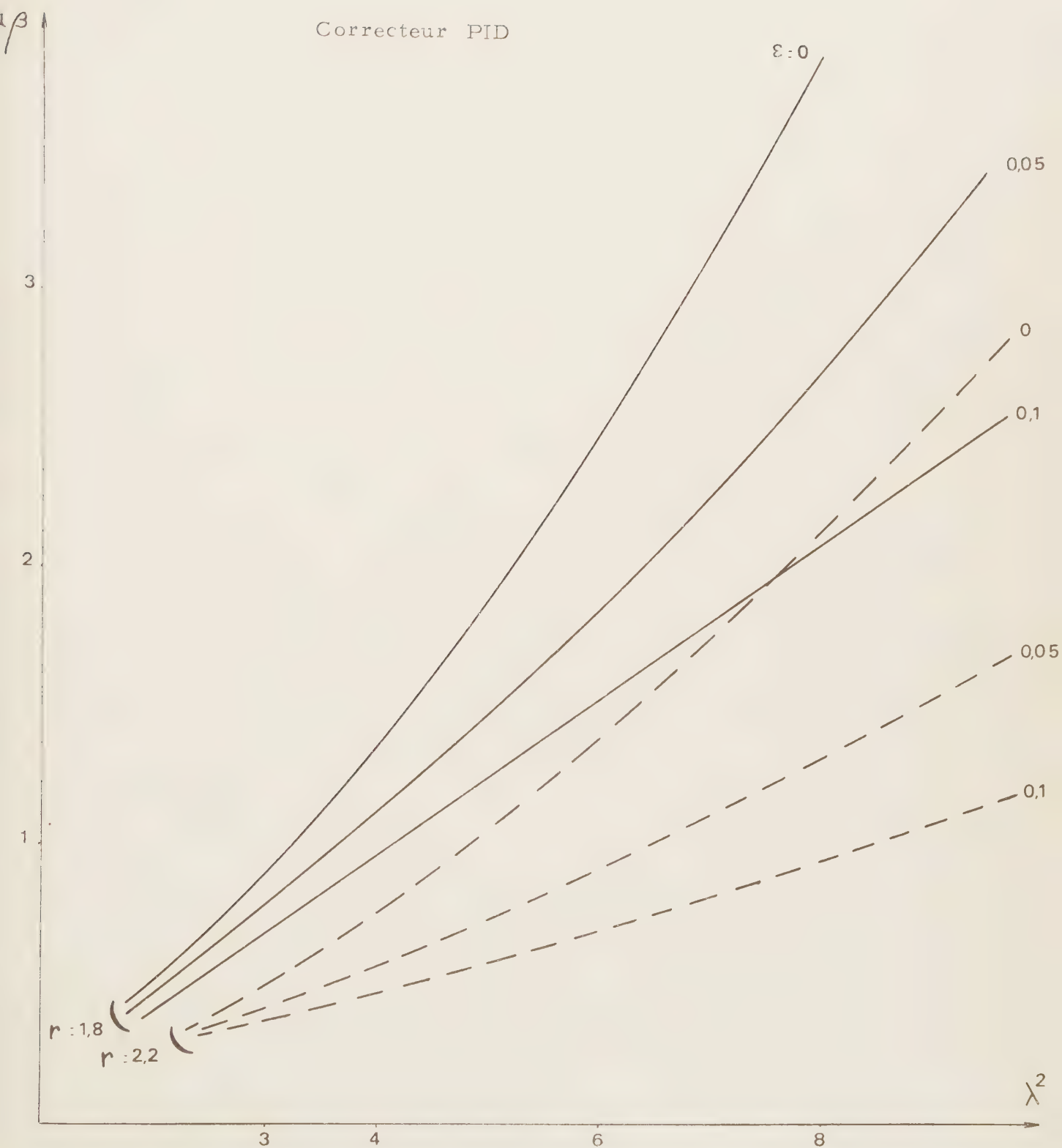
et

$$\tau' = \tau'_o \cdot \frac{1}{k_1 k_2 k_3} \quad (18)$$

Le tableau 8 donne k_1 , k_2 et k_3 , ainsi que $a\beta$, τ et τ' pour les valeurs habituelles de λ^2 et de r et pour $\xi = 0,1$ et $0,05$. On constate que pour $\xi = 0,05$, les résultats sont voisins de la moyenne entre le système théorique et le système réel avec $\xi = 0,1$.

Les graphes (5) et (6) représentent les variations des paramètres $a\beta$, τ et τ' pour $r = 1,8$ et $r = 2,2$. La correction sur le paramètre d'action proportionnelle β peut être très importante, toujours dans le sens de la diminution, et d'autant plus que λ^2 est plus grand.

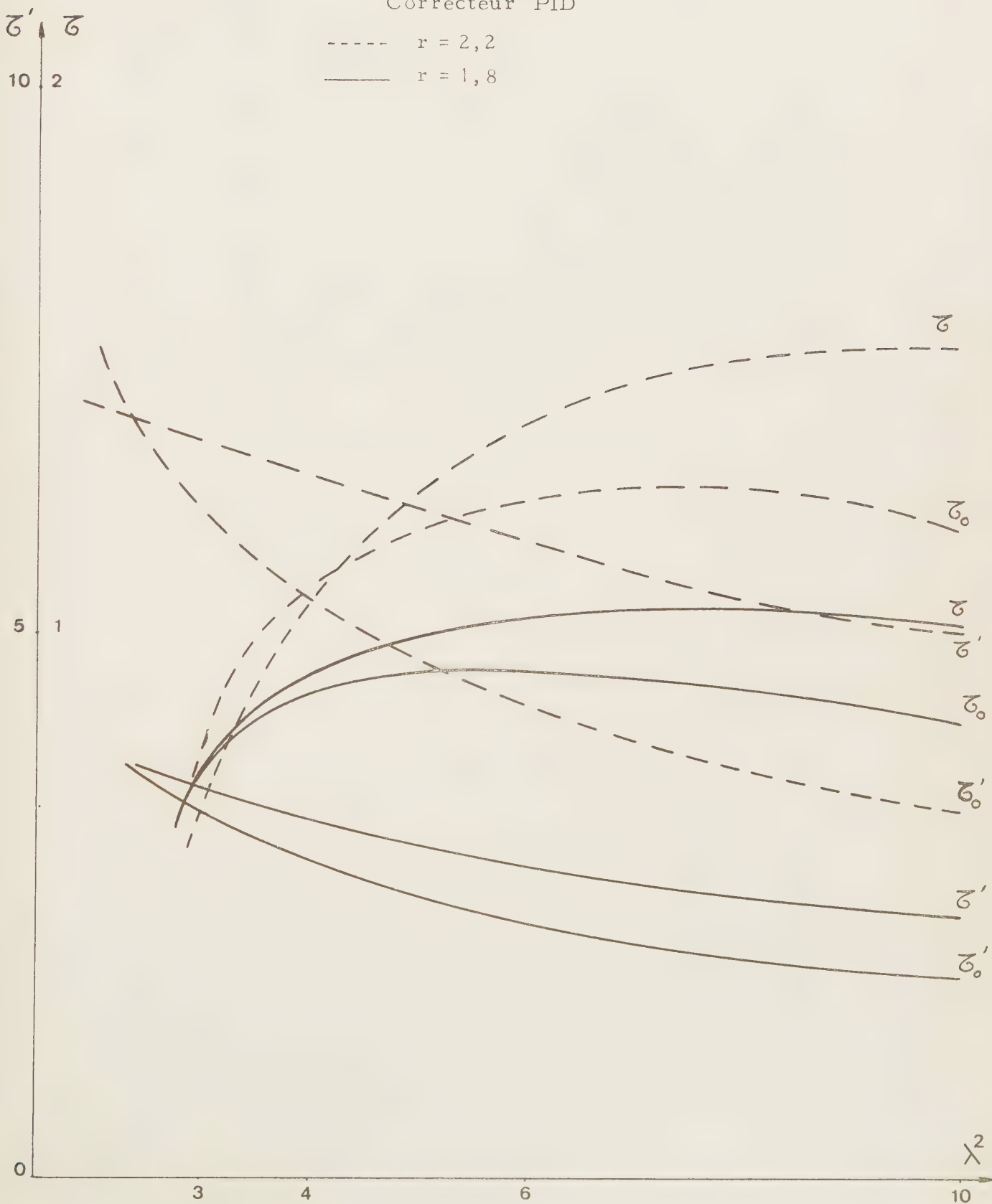
Les corrections sur les constantes d'intégration τ' et de dérivation τ , toujours dans le sens de l'augmentation, sont en général plus faibles sans toutefois qu'on puisse les négliger comme dans le cas du correcteur PI. Les écarts relatifs entre τ' et τ'_o peuvent dépasser 30 % pour les grandes valeurs de λ^2 alors qu'ils sont toujours inférieurs à 20 % pour la constante de dérivation.



Correcteur PID

----- $r = 2,2$

———— $r = 1,8$



r	1,8					2					2,2				
	λ^2					λ^2					λ^2				
k_1	ε	3	4	6	10	3	4	6	10		3	4	6	10	
		1,105	1,079	1,052	1,032	1,111	1,083	1,055	1,033		1,117	1,088	1,058	1,035	
		0,05	1,057	1,043	1,029	1,060	1,045	1,030	1,018		1,064	1,048	1,032	1,019	
k_2	0,1	0,935	0,969	1,016	1,066	0,911	0,941	0,989	1,042		0,893	0,918	0,964	1,020	
	0,05	0,963	0,982	1,009	1,036	0,950	0,967	0,994	1,023		0,940	0,954	0,980	1,011	
	0,1	0,912	0,842	0,769	0,701	0,909	0,833	0,744	0,665		0,912	0,825	0,723	0,634	
k_3	0,05	0,949	0,908	0,859	0,813	0,948	0,900	0,841	0,786		0,950	0,894	0,825	0,761	
	0	0,891	1,372	2,520	5,422	0,650	1,000	1,837	3,953		0,488	0,751	1,380	2,970	
	0,1	0,693	0,952	1,516	2,844	0,489	0,654	1,006	1,825		0,3628	0,469	0,695	1,218	
$a\beta$	0,05	0,774	1,112	1,874	3,714	0,555	0,783	1,290	2,500		0,4141	0,5732	0,920	1,741	
	0	3,370	2,916	2,381	1,844	4,619	4,000	3,266	2,530		6,148	5,324	4,347	3,367	
	0,1	3,57	3,297	2,892	2,390	5,017	4,708	4,205	3,529		6,751	6,464	5,891	5,029	
$\bar{U}'$	0,05	3,48	3,132	2,671	2,152	4,835	4,396	3,794	3,089		6,469	5,956	5,211	4,292	
	0	0,748	0,891	0,926	0,840	0,770	1,000	1,088	1,012		0,745	1,089	1,251	1,194	
	0,1	0,751	0,925	1,032	1,018	0,744	1,020	1,225	1,275		0,672	1,065	1,397	1,545	
$\bar{U}$	0,05	0,753	0,916	0,913	0,947	0,761	1,021	1,179	1,172		0,713	1,092	1,358	1,414	

Tableau 8.

V.2. ETUDE DES INTEGRALES QUADRATIQUES.

Les expressions (18) et (20) du chapitre III (p.20) pour l'intégrale quadratique de l'erreur, donnent, dans le cas du correcteur PID ,

$$\frac{c(s)}{d(s)} [J_1] = E \cdot \frac{2 - s(2\lambda + x\tau') + s^2(2 + x\lambda\tau' - 2\tau\tau') + s^3(x\tau' + 2\lambda\tau\tau') + s^4 2\tau\tau'}{s\beta x + s(2 + \alpha\beta x\tau') + s^2(\alpha\beta x\tau\tau' + 2\lambda + x\tau') + s^3(2 + \lambda x\tau' + 2\tau\tau') + s^4(x\tau' + 2\lambda\tau\tau') + s^5 2\tau\tau'}$$

avec

$$\frac{c(s)}{d(s)} [J_{10}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c(s)}{d(s)} [J_1]$$

L'intégrale en s , J_1 est d'ordre 5 tandis que J_{10} n'est que d'ordre 4.

Pour l'intégrale quadratique de la commande, le dénominateur est le même que pour J_1 , tandis que le numérateur s'écrit

$$c(s) [J_2] = \frac{E}{s} s\beta x(1 + s\tau' + s^2\tau\tau')(1 + \lambda s + s^2)$$

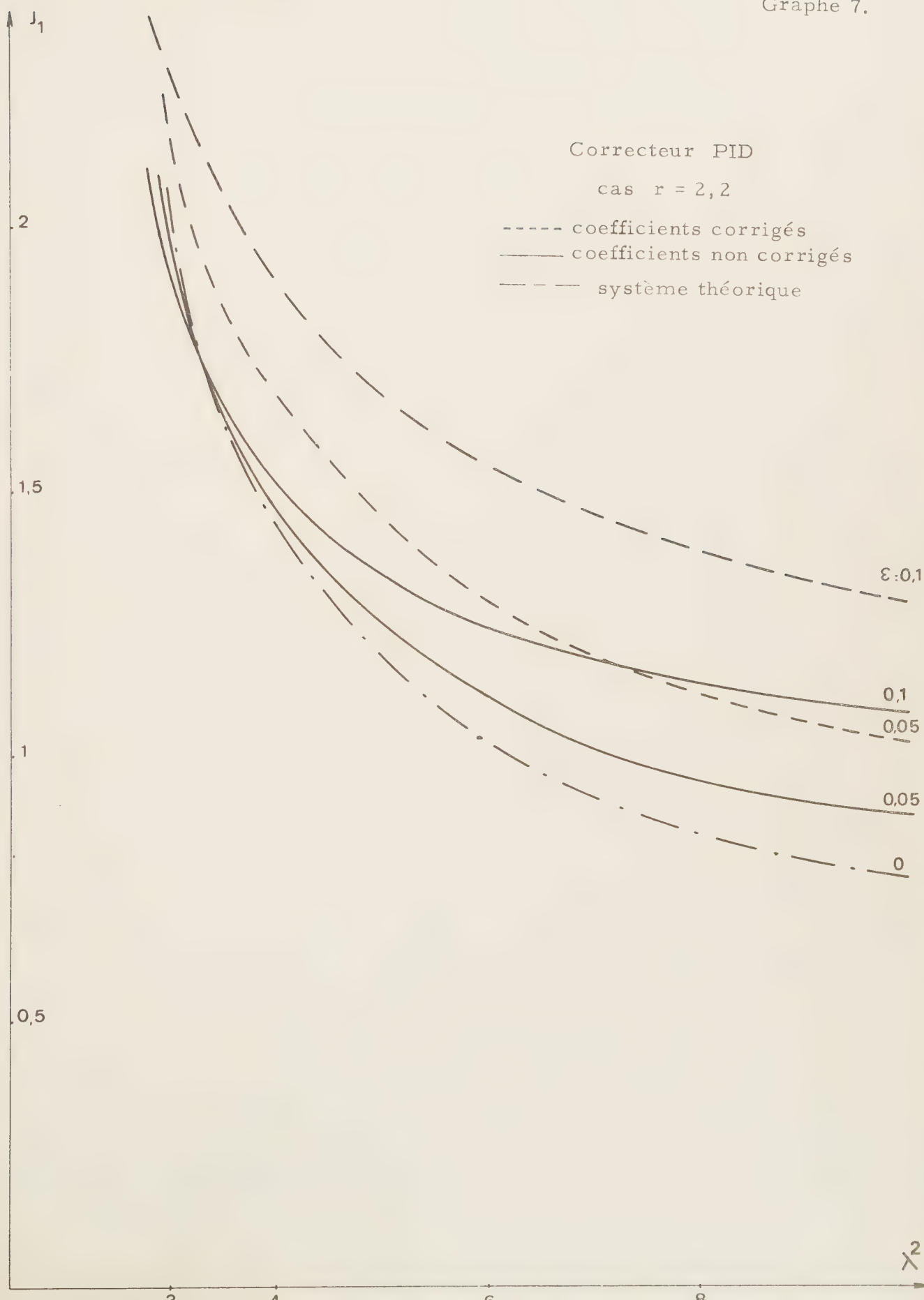
Ces deux intégrales sont

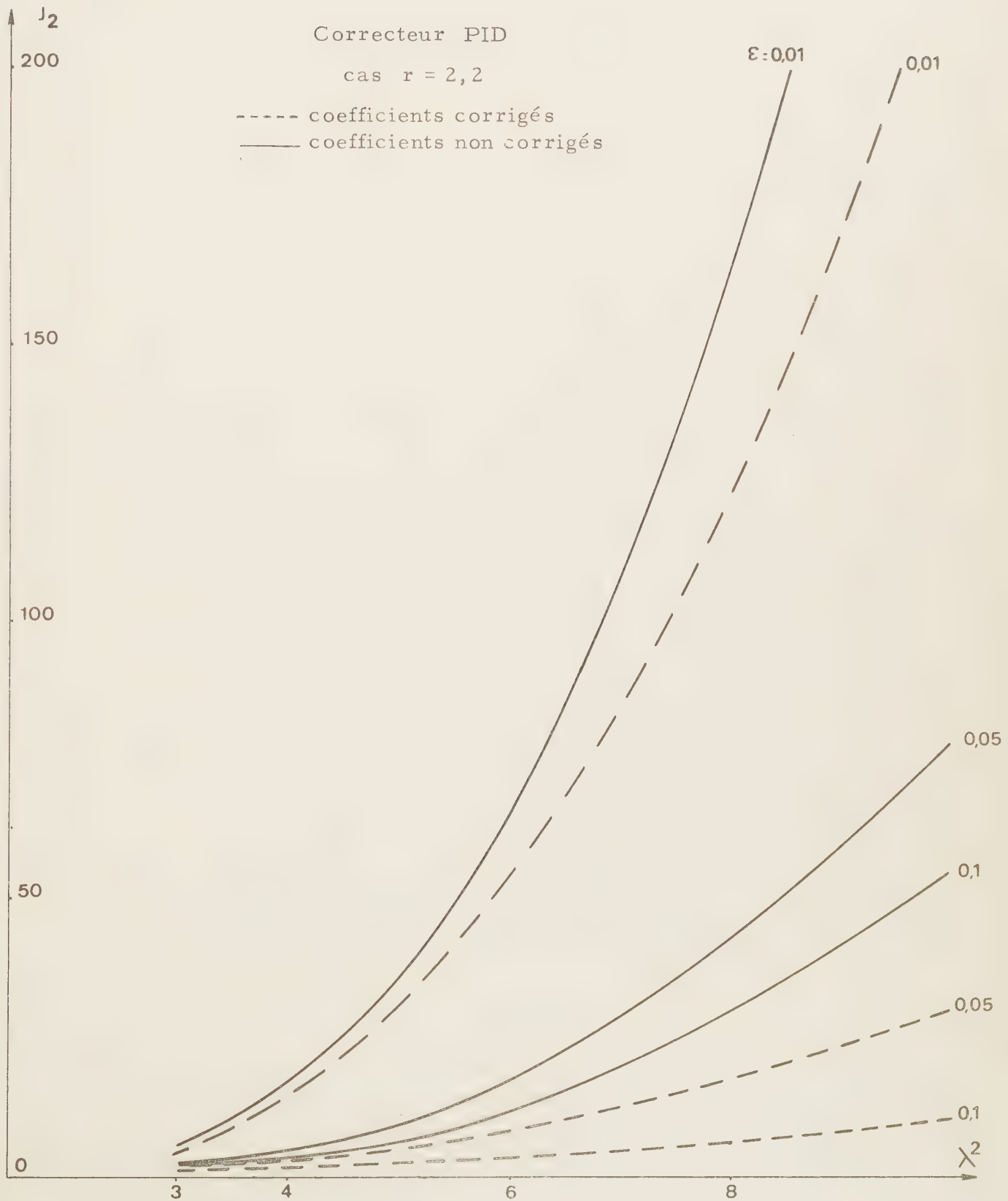
$$I_5 = \frac{1}{2\Delta_5} \left[c_4^2 m_0 + (c_3^2 - 2c_2 c_4) m_1 + (c_2^2 - 2c_1 c_3 + c_0 c_4) m_2 + (c_1^2 - 2c_0 c_2) m_3 + c_0^2 m_4 \right]$$

avec

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{d_5} (d_0 m_1 - d_1 m_2) & m_3 &= \frac{1}{d_0} (d_2 m_2 - d_4 m_1) \\ m_1 &= -d_0 d_3 + d_1 d_2 & m_4 &= \frac{1}{d_2} (d_2 m_3 - d_4 m_2) \\ m_2 &= -d_0 d_5 + d_1 d_4 & \Delta_5 &= d_0 (d_1 m_4 - d_3 m_3 + d_5 m_2) \end{aligned}$$

Graphe 7.





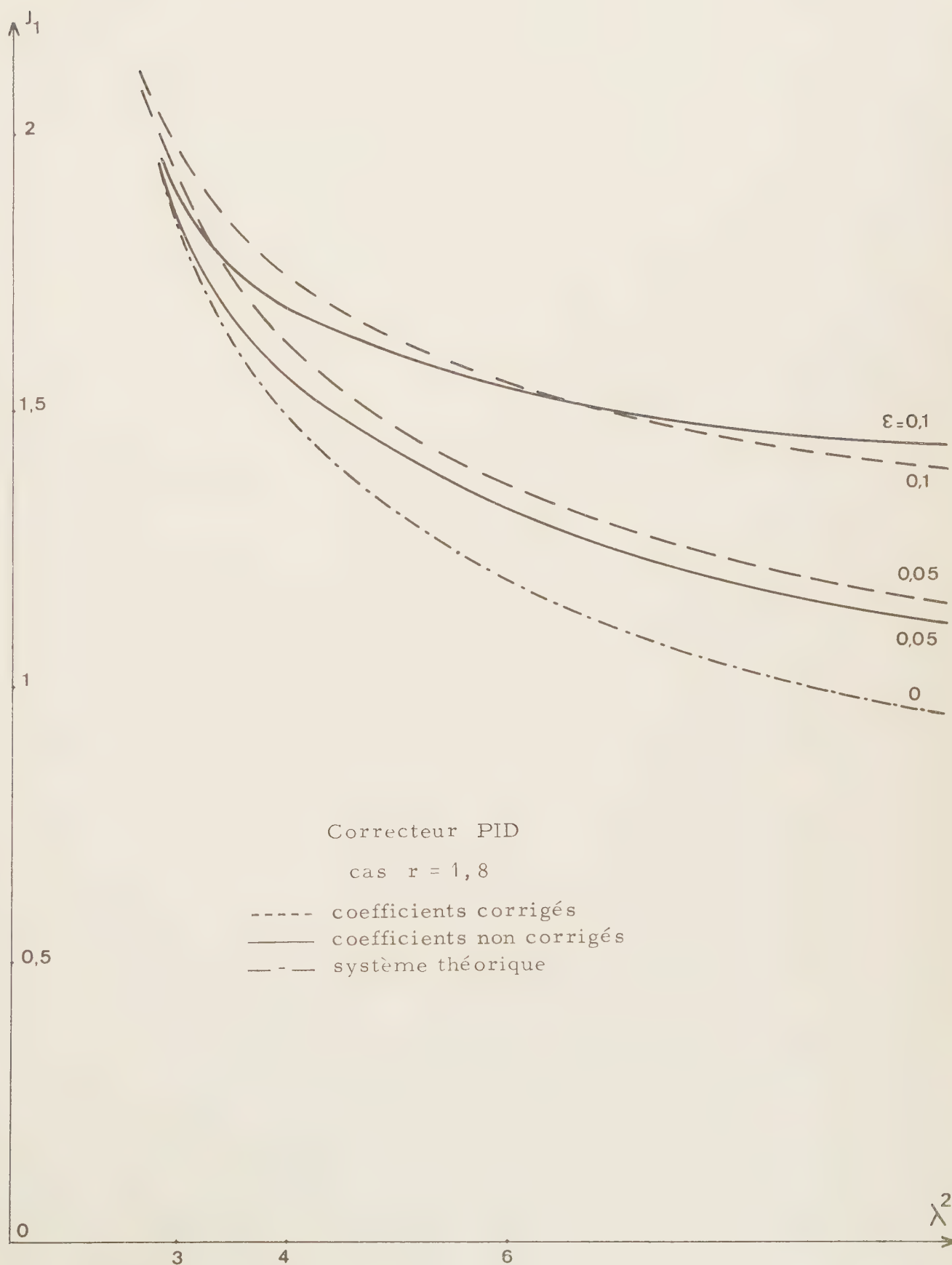
Leur valeur numérique dans les cas $r = 1,8$ et $r = 2$ est donnée dans le tableau 9.

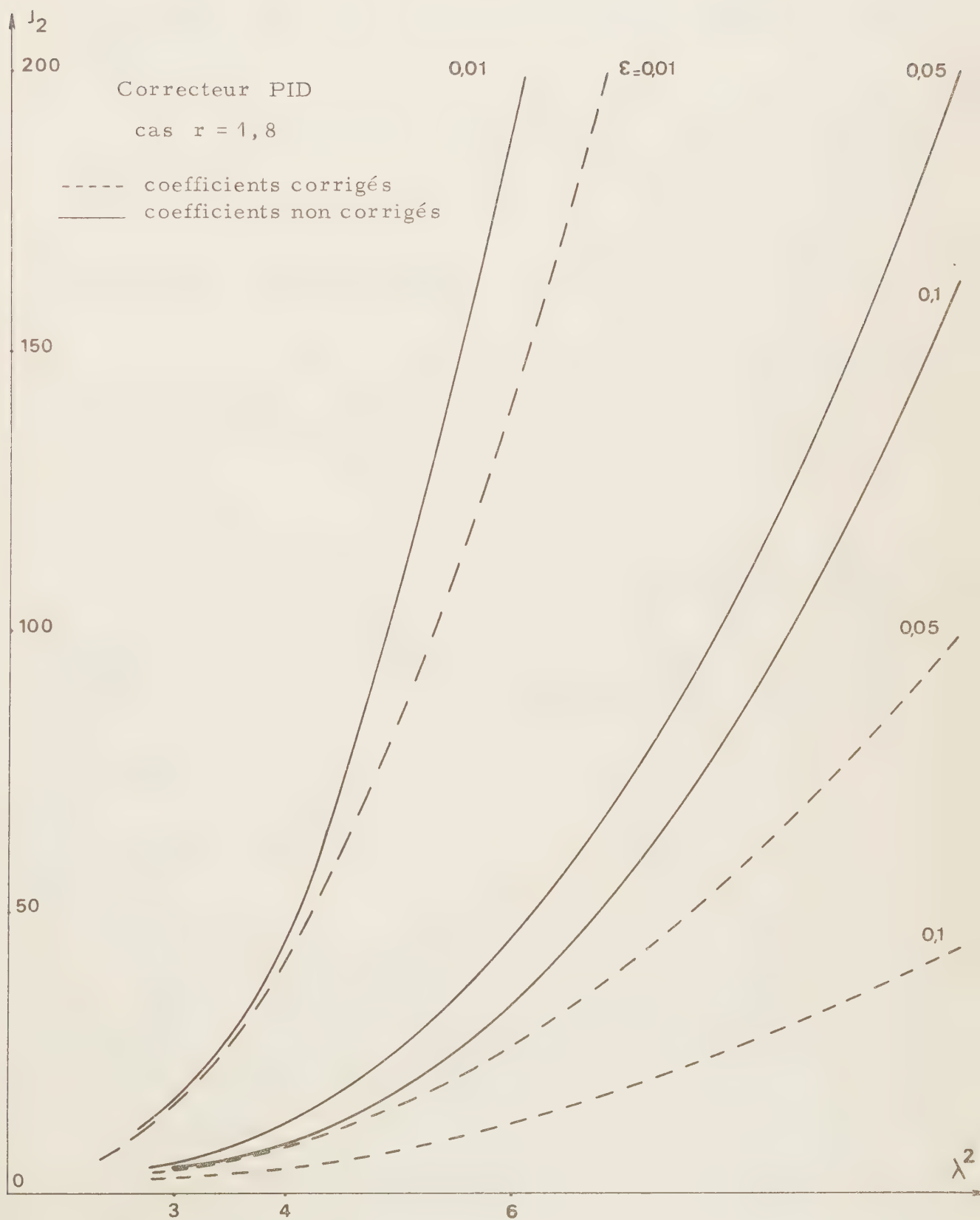
Les courbes $J_1(\lambda^2)$ et $J_2(\lambda^2)$ pour $r = 2,2$ (graphes 7 et 8) et pour $r = 1,8$ (graphes 9 et 10) montrent la sensibilité des intégrales quadratiques aux variations de ε .

r		1,8				2			
λ^2		3	4	6	10	3	4	6	10
***** Système corrigé *****									
J_1	ε								
	0,1	1,978	1,748	1,560	1,401	2,035	1,728	1,470	1,275
	0,05	1,929	1,621	1,368	1,155	1,957	1,569	1,261	1,034
J_2	0,1	2,210	4,421	12,03	43,64	1,148	2,215	5,758	20,00
	0,05	3,741	8,535	25,851	99,72	1,981	4,579	13,81	52,66
	0,01	15,68	42,02	142,56	587,4	8,503	24,433	85,88	359,5
***** Système non corrigé *****									
J_1	0,1	1,893	1,684	1,555	1,447	1,815	1,508	1,132	1,181
	0,05	1,861	1,558	1,323	1,121	1,819	1,432	1,152	0,9503
J_2	0,1	3,545	9,135	33,83	162,7	1,903	4,976	18,59	89,63
	0,05	4,874	12,74	45,19	200,6	2,655	7,259	26,56	120,0
	0,01	16,65	45,89	160,9	682,4	9,110	27,11	99,28	431,2

Tableau 9.

Comme dans le cas du correcteur PD, le fait de le considérer comme physiquement réalisable est important pour l'intégrale J_2 qui devient finie. On remarque en outre que la correction apportée sur les





paramètres diminue encore cette intégrale dans un rapport 5 dans la plupart des cas.

L'intégrale quadratique de l'erreur est de son côté sensiblement augmentée par l'accroissement simultané du taux de dépassement et du temps de réponse.

V.3. SIMULATION ANALOGIQUE.

Les fonctions de transfert à simuler sont d'ordre 5 avec numérateur du deuxième degré en s . Le schéma du montage analogique utilisé avec les notations habituelles est représenté sur la figure 5.

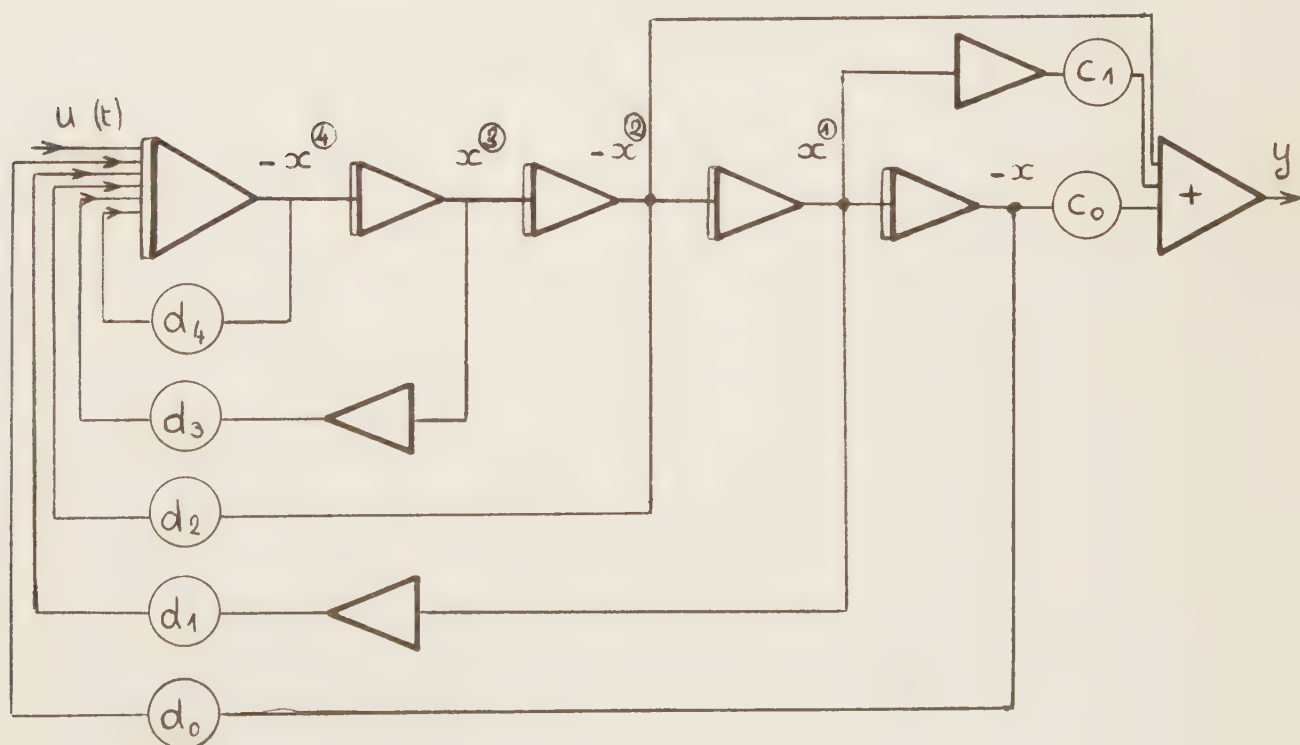


Figure 5.

Les résultats sont tout-à-fait comparables à ceux obtenus avec le correcteur PD. La planche 13 donne, à titre d'exemple, les réponses obtenues pour le cas $r = 2$ et $\lambda^2 = 4$ avec $\xi = 0,05$ d'une part (cas 2 et 4) et $\xi = 0,1$ d'autre part (cas 3 et 5).

Dans ce cas limite, dépassement voisin de 50 %, les expressions (19) et (20) qui prévoient le temps de réponse et le taux de dépassement sont, surtout pour le dernier, également en limite d'utilisation. On a

$$\log D \% = 1,8 - (r - 1,5) \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{\lambda^2}} \quad (19)$$

et

$$t = 2,2 \frac{r^3}{\lambda} \left[1 - \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{\lambda^2}} \right] \quad (20)$$

qui donnent $D_{\text{théorique}} = 36 \%$ et $t_{\text{théorique}} = 4,4 \text{ s}$ alors que les résultats analogiques donnent

$$D_o = 45 \% \quad \text{et} \quad t_o = 4,5 \text{ s}$$

et pour le système non corrigé

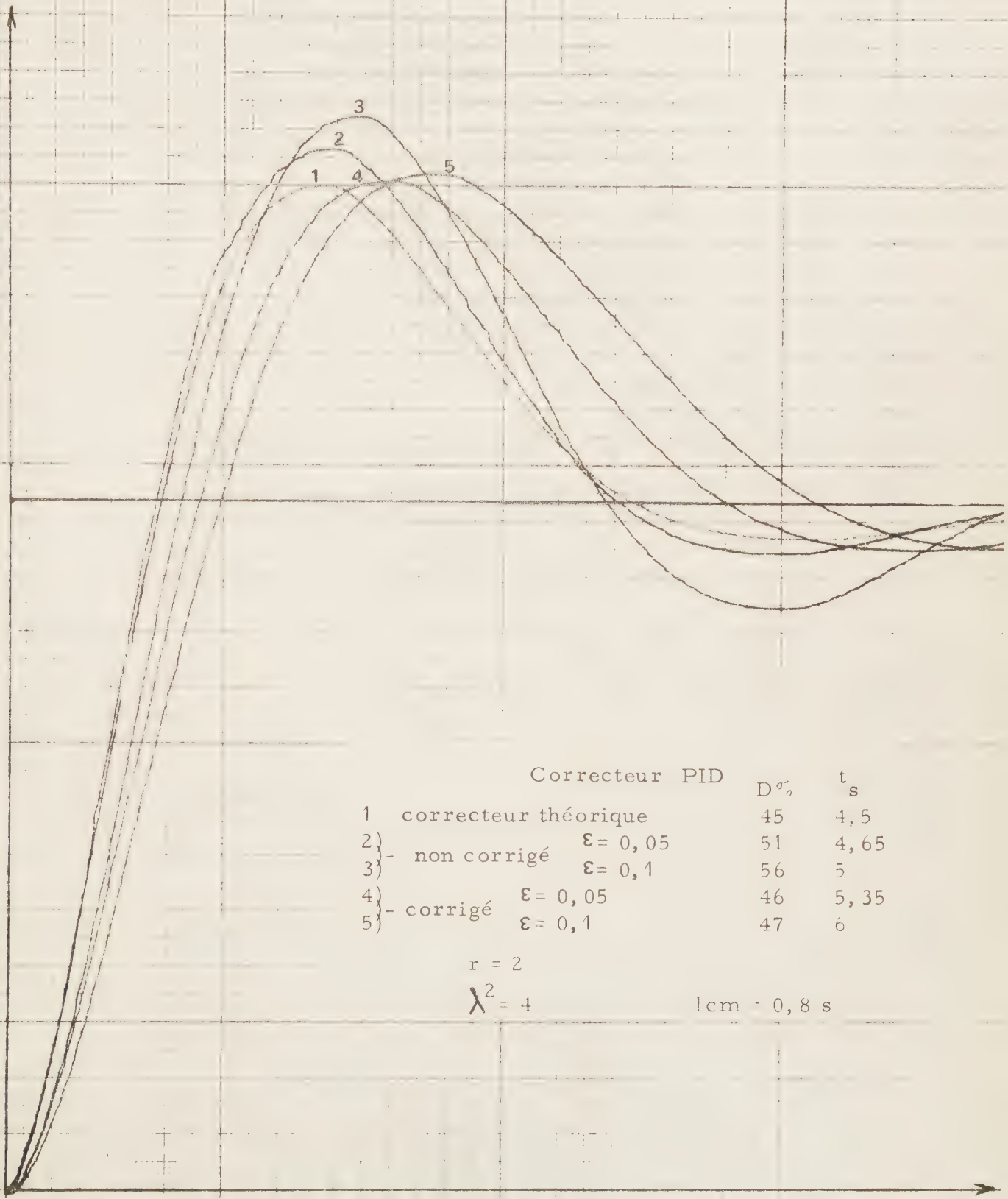
$$D_{0,1} = 56 \% \quad \text{et} \quad t_{0,1} = 5$$

V. 4. CONCLUSION.

Les résultats obtenus avec le correcteur PID sont tout-à-fait comparables à ceux relatifs au PD. Les constantes de temps parasites dégradent sensiblement la réponse surtout le dépassement. La correction proposée améliore le dépassement au prix d'une augmentation du temps de réponse. L'intégrale quadratique de l'erreur est légèrement augmentée mais par contre, l'intégrale quadratique de la contrainte devient finie

et la correction sur les paramètres peut encore la diminuer, dans certains cas, dans un rapport 5.

« . « . « . «



Correcteur PID		$D\%$	t_s
1	correcteur théorique	45	4,5
2)	non corrigé $\varepsilon = 0,05$	51	4,65
3)		56	5
4)	corrigé $\varepsilon = 0,05$	46	5,35
5)		47	6

$$r = 2$$

$$\lambda^2 = 4$$

$$lcm = 0,8 \text{ s}$$

 *
 *
 * CHAPITRE VI *
 *
 *

GENERALISATION DE LA METHODE

.....

VI.1. CORRECTEUR PID POUR UNE INSTALLATION D'ORDRE
 QUELCONQUE SANS NUMERATEUR.

Considérons la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{c_o}{\sum_{i=0}^n d_i s^i} \quad (1) \quad [18] [19]$$

que nous associons au correcteur PID physiquement réalisable. Le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée du système a pour développement

$$D[F(s)] = c_o \beta(1+x) + 2d_o + s \left[2d_1 + d_o x \tau' + c_o \beta(1+x) \tau' \right] + s^2 \left[d_1 x \tau' + 2d_o \tau \tau' + 2d_2 + c_o \beta(1+x) \tau \tau' \right] + s^3 (2d_3 + d_2 x \tau' + 2d_1 \tau \tau') + s^4 (2d_4 + d_3 x \tau' + 2d_o \tau \tau') + \dots$$

Les trois premiers rapports caractéristiques sont alors

$$r_1 = \frac{\left[2d_1 + d_o x \tau' + c_o \beta(1+x) \tau' \right]^2}{\left[c_o \beta(1+x) + 2d_o \right] \left[d_1 x \tau' + 2d_o \tau \tau' + 2d_2 + c_o \beta(1+x) \tau \tau' \right]} \quad (2)$$

$$r_2 = \frac{[d_1 x \tau' + 2d_o \tau \tau' + 2d_2 + c_o \beta (1+x) \tau \tau']^2}{[2d_1 + d_o x \tau' + c_o \beta (1+x) \tau'] (2d_3 + d_2 x \tau' + 2d_1 \tau \tau')} \quad (3)$$

$$r_3 = \frac{(2d_3 + d_2 x \tau' + 2d_1 \tau \tau')^2}{[d_1 x \tau' + 2d_o \tau \tau' + 2d_2 + c_o \beta (1+x) \tau \tau'] (2d_4 + d_3 x \tau' + 2d_2 \tau \tau')} \quad (4)$$

dont les limites, lorsque x tend vers l'infini, se réduisent aux rapports caractéristiques pour le système théorique,

$$r_{1o} = \frac{(d_o + c_o \beta_o)^2}{c_o \beta_o (d_1 + c_o \beta_o \tau_o)} \quad (5)$$

$$r_{2o} = \frac{(d_1 + c_o \beta_o \tau_o)^2}{(d_o + c_o \beta_o) d_2} \quad (6)$$

$$r_{3o} = \frac{d_2^2}{(d_1 + c_o \beta_o \tau_o) d_3} \quad (7)$$

De ces trois dernières relations, on tire les coefficients d'action dérivée, proportionnelle et intégrale respectivement par

$$d_1 + c_o \beta_o \tau_o = \frac{d_2^2}{d_3 r_{3o}}, \quad d_o + c_o \beta_o = \frac{d_2^3}{r_{2o} r_{3o} d_3} \quad \text{et} \quad \frac{\beta_o}{\tau_o} = \frac{d_2^4}{c_o r_{1o} r_{2o}^2 r_{3o} d_3^3} \quad (8)$$

En négligeant le terme en $\varepsilon^2 = \frac{1}{2x}$ dans le numérateur et

dans le dénominateur des expressions (2), (3) et (4), on fait apparaître les formes de r_{io} ($i = 1, 2$ et 3) en facteur de la fonction de correction k_i qui vaut 1 pour le système théorique.

Par exemple, à partir de (2), on obtient

$$r_1 = \frac{[d_o + c_o \beta]^2 \tau'}{(c_o \beta (d_1 + c_o \beta \tau))} k_1$$

On déduit ainsi des relations (8) les paramètres corrigés du correcteur physiquement réalisable en remplaçant r_{i0} par $\frac{r_i}{k_i}$, avec en outre, lorsque le polynôme est normal, $r_i = r$ quel que soit i . Ainsi les expressions

$$d_1 + c_o \beta \tau = \frac{d_2^2 k_3}{d_3 r},$$

$$d_o + c_o \beta = \frac{d_2^3 k_2 k_3^2}{r^3 d_3^2} \quad (9)$$

et

$$\frac{\beta}{\tau'} = \frac{d_2^4 k_1 k_2^2 k_3^3}{c_o r^6 d_3^3}$$

donnent les coefficients d'action dérivée, proportionnelle et intégrale par l'intermédiaire des fonctions de correction calculées en utilisant les valeurs théoriques.

Ces fonctions de correction sont

$$k_1 = \frac{1 + \frac{2\varepsilon}{\tau'} \cdot \frac{2d_1 + c_o \beta \tau'}{d_o + c_o \beta}}{1 + \varepsilon \left[\frac{2d_o + c_o \beta}{d_1 + c_o \beta \tau} + \frac{2d_2}{\tau'(d_1 + c_o \beta \tau)} + \frac{2d_o + c_o \beta}{c_o \beta} \right]}$$

$$k_2 = \frac{1 + \frac{2\varepsilon}{\tau'} \cdot \frac{2d_0\tau\tau' + 2d_2 + c_0\beta\tau\tau'}{d_1 + c_0\beta\tau}}{1 + \frac{\varepsilon}{\tau'} \left[\frac{2d_1 + c_0\beta\tau'}{d_0 + c_0\beta} + 2 \frac{d_3 + d_1\tau\tau'}{d_2} \right]}$$

$$k_3 = \frac{1 + \frac{4\varepsilon}{\tau'} \cdot \frac{d_3 + d_1\tau\tau'}{d_2}}{1 + \frac{\varepsilon}{\tau'} \left[\frac{1d_0\tau\tau' + 2d_2 + c_0\beta\tau\tau'}{d_1 + c_0\beta\tau} + 2 \frac{d_4 + d_2\tau\tau'}{d_3} \right]}$$

VI.2. CAS OU L'INSTALLATION A UNE FORME DE STREJC.

Si l'installation a été identifiée par la méthode de Strejc sans retard pur, avec

$$G(s) = \frac{c_0}{(1 + Ts)^n} \quad \begin{bmatrix} 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 \end{bmatrix}$$

les coefficients du dénominateur de $G(s)$ sont les coefficients du binôme $(1 + Ts)^n$. Dans ces conditions, les relations (9) deviennent

$$d_1 + c_0\beta\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{n-2} \cdot \frac{k_3}{r} T$$

$$d_0 + c_0\beta = \frac{9}{2} \cdot \frac{k_2 k_3^2}{r^3} \cdot \frac{n(n-1)}{(n-2)^2}$$

et

$$\frac{c_0\beta}{\tau'} = \frac{27}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{(n-2)^3} \cdot \frac{k_1 k_2^2 k_3^2}{r^6} \cdot \frac{1}{T}$$

La méthode proposée exige donc simplement le calcul des coefficients k et s'étend au cas où $G(s)$ a un numérateur différent d'une constante ainsi qu'aux correcteurs du type PI, PD et PDD² qui sont les plus fréquemment utilisés.

Dans le cas où on tient compte du retard pur θ , on a pour $G(s)$

$$G(s) = \frac{c_o e^{-\theta s}}{(1+Ts)^n}$$

Nous supposons que ce retard pur correspond à la seule constante de temps supplémentaire θ d'où

$$G(s) = \frac{c_o}{(1 + \theta s)(1 + Ts)^n} \quad [23]$$

En développant, on obtient pour les coefficients d_i de (1)

$$d_o = 1$$

$$d_1 = nT + \theta$$

$$d_2 = \frac{n(n-1)T^2}{2!} + nT\theta = nT\left(\frac{n-1}{2}T + \theta\right)$$

$$d_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}T^3 + \frac{n(n-1)}{2!}T^2\theta = \frac{n(n-1)T^2}{2}\left(\frac{n-2}{3}T + \theta\right)$$

Les expressions (9) deviennent dans ces conditions

$$d_1 + c_o \beta \tau = \frac{n^2 T^2 \left(\frac{n-1}{2}T + \theta\right)^2}{\frac{n(n-1)T^2}{2} \left(\frac{n-2}{3}T + \theta\right)} k_3 = 2 \frac{n}{n-1} \frac{\left(\frac{n-1}{2}T + \theta\right)^2}{\frac{n-2}{3}T + \theta} \cdot \frac{k_3}{r}$$

$$d_o + c_o \beta = \frac{n^3 T^3 \left(\frac{n-1}{2} T + \theta\right)^3 k_2 k_3^2}{\frac{n^2 (n-1)^2 T^4}{4} \left(\frac{n-2}{3} T + \theta\right)^2 r^3} = 2^2 \frac{n}{T(n-2)^2} \frac{\left(\frac{n-1}{2} T + \theta\right)^3}{\left(\frac{n-2}{3} T + \theta\right)^2} \frac{k_2 k_3^2}{r^3}$$

et enfin

$$c_o \frac{\beta}{T^1} = \frac{n^4 T^4 \left(\frac{n-1}{2} T + \theta\right)^4}{\frac{n^3 (n-1)^3}{2^3} T^6 \left(\frac{n-2}{3} T + \theta\right)^3} \cdot \frac{k_1 k_2^2 k_3^3}{r^6} \quad (10)$$

$$= 2^3 \frac{n}{(n-3)^3} \cdot \frac{\left(\frac{n-1}{2} T + \theta\right)^4}{T^2 \left(\frac{n-2}{3} T + \theta\right)^3} \cdot \frac{k_1 k_2^2 k_3^3}{r^6}$$

Comme toujours, avec $k_i = 1$, on déduit les paramètres du correcteur théorique, ce qui ensuite, selon notre approximation, permet de calculer k_1 , k_2 , et k_3 d'où enfin, par les expressions (10), les coefficients du correcteur physiquement réalisable.

* . * . * . *

CONCLUSION

Après avoir rappelé brièvement la méthode des polynômes normaux ainsi que les résultats d'une étude faite au Laboratoire d'Electricité et d'Automatique, qui permet de prévoir directement le dépassement compte tenu d'un numérateur, nous avons donné les fonctions de transfert des principaux correcteurs en introduisant des constantes de temps parasites. Par simulation analogique, nous avons montré comment déterminer ces constantes de temps.

Nous avons ensuite appliqué la méthode des polynômes normaux à la détermination des paramètres de correcteurs associés à une installation d'ordre 3 de type I dans deux cas : le correcteur est théorique, à actions parfaitement découplées d'une part et d'autre part, le correcteur est physiquement réalisé.

Si dans le premier cas le calcul est toujours possible, dans le deuxième, déjà dans les cas les plus simples, on a un système d'équations du troisième degré à résoudre.

Partant du principe que les constantes de temps introduites lors de la réalisation du correcteur, ont une action plus faible que les constantes de temps principales, nous proposons une méthode d'approximation, en introduisant des fonctions de correction, qui permet de déduire rapidement les coefficients du système physique de ceux du système théorique.

Ces facteurs de correction, égaux à un dans le cas où on néglige les constantes de temps parasites, peuvent atteindre 0,75 dans certains cas limites, ce qui apporte alors des variations importantes sur les paramètres.

Ces résultats ont été appliqués aux trois correcteurs PI , PD et PID . Pour le premier, sans action dérivée, le fait d'introduire les constantes de temps parasites ne dégrade pratiquement pas le fonctionnement du système ; pour certaines caractéristiques de la réponse, les intégrales quadratiques par exemple, on constate même une légère amélioration. Au contraire, pour les correcteurs qui ont une action dérivée, les constantes de temps parasites peuvent avoir une influence assez grande dans le sens de la détérioration des performances. Ce résultat est normal puisque l'action dérivée joue un grand rôle lors des variations brusques de l'entrée, mais cette action est très sensiblement contrariée par les constantes de temps supplémentaires.

Par vérification analogique, nous avons comparé les performances des systèmes associés au correcteur théorique d'une part, au correcteur réalisable sans tenir compte de corrections, et au système réalisable corrigé. Nous avons de plus montré l'intérêt des constantes de temps supplémentaires pour le calcul de l'intégrale quadratique de la commande.

Nous avons enfin donné les expressions des paramètres corrigés du correcteur PID associé à une installation d'ordre quelconque avec numérateur constant. Nous avons appliqué ces relations à cette installation identifiée par la méthode de Strejc avec retard pur d'une part et sans retard pur d'autre part.

BIBLIOGRAPHIE.

- 1 . P. NASLIN, Critère d'amortissement, Automatisme, juin 1960.
- 2 . P. NASLIN, Technologie et calcul pratique des systèmes asservis, Dunod, 1968.
- 3 . S. WEGRZYN, Les bases de l'automatique industrielle, Dunod, 1965.
- 4 . T. KONVERSKI, Synthesis of third-order type 1 systems, Control, avril 1968, vol. 12, p. 316.
- 5 . C. HUMBERT, M. AUBRUN, Identification des systèmes apériodiques du 2ème ordre par intégration du signal d'erreur, Electricité Electronique Moderne, oct. 1969, n°237.
- 6 . R. GUILLIEN, Electronique, P. U. F., 1961, T. 4, p. 239.
- 7 . C. HUMBERT, M. AUBRUN, Lieu des carrés des pôles dans l'optimisation quadratique, Revue A Automatisme, oct. 1969, XI, n°4.
- 8 . M. AUBRUN, C. HUMBERT, Détermination par la méthode des polynômes normaux du correcteur PID réel pour un système linéaire d'ordre quelconque, C. R. A. S. ,
- 9 . P. NASLIN, Introduction à la commande optimale, Dunod, 1966.
- 10 . C. TRICHOT, Thèse de Spécialité Automatique, Faculté des Sciences de Nancy.
- 11 . D. P. ECKMAN, Régulation automatique industrielle, Dunod, 1963.
- 12 . G. LEONARD, Etude d'un stabilisateur de roulis, Automatisme, 12 déc. 1967.
- 13 . M. AUBRUN, C. HUMBERT, C. TRICHOT, Méthode analogique pour la détermination de fonctionnements optimaux, Revue A Automatisme, n° 3, 1970.
- 14 . P. LEFEVRE, Optimisation statistique des systèmes dynamiques Dunod, 1965.
- 15 . S. S. L. CHANG, Synthèse des systèmes à commande optimale, Dunod, 1966.
- 16 . C. HUMBERT, M. AUBRUN, Root locus and optimization of aperiodic systems using Strejc's method, Revue A Automatisme, 3, 1970.
- 17 . M. MENAHEM, Régulation des systèmes industriels complexes, Automatisme, janvier 1963.

- 18 . C. HUMBERT, M. AUBRUN, Graduation en réponse du lieu des pôles, Automatismes, mars 1969.
- 19 . C. HUMBERT, M. AUBRUN, Détermination rapide du correcteur et de la réponse d'un système du 3ème ordre dans l'optimisation quadratique, C. R. A. S., n° 25, 269, série A, déc. 1969, 1230-32.
- 20 . V. STREJC, Détermination approchée des caractéristiques de régulation d'un processus à réponse apériodique, Automatismes, 3, mars 1960.
- 21 . R. CHAUSSARD, Utilisation pratique des méthodes d'analyse dynamique, Automatismes, février 1963 et mars 1963.
- 22 . R. CHAUSSARD, Utilisation des méthodes d'analyse indiciaire et du critère de Naslin, sept. 1946, Automatismes.
- 23 . C. HUMBERT, Thèse de doctorat, mars 1970, Faculté des Sciences de Nancy.

* . * . * . *

VU, et PERMIS D'IMPRIMER

Nancy, le 1970.

Le DOYEN, J. AUBRY.

